

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Суворов А.И. Дмитриевич  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 25.03.2025 16:23:37  
Уникальный программный ключ:  
a39bdb15d680d3b0adbfc0af5c1efb14747dc0

**Негосударственное образовательное учреждение  
высшего образования**

**«Российская экономическая школа»  
(институт)**

## **КОМПЛЕКТ ОЦЕНОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

**для проведения текущего контроля  
успеваемости и промежуточной аттестации  
на программах подготовки научных и  
научно-педагогических кадров в  
аспирантуре**

НАУЧНАЯ  
СПЕЦИАЛЬНОСТЬ

- 5.2.2 Математические, статистические и инструментальные методы в экономике
- 5.2.3 Региональная и отраслевая экономика
- 5.2.4 Финансы
- 5.2.5 Мировая экономика
- 5.2.6 Менеджмент

Оценочные материалы предназначены для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации аспирантов по научным специальностям:

5.2.2 Математические, статистические и инструментальные методы в экономике

5.2.3 Региональная и отраслевая экономика

5.2.4 Финансы

5.2.5 Мировая экономика

5.2.6 Менеджмент

Составители:

методист Учебно-методического отдела Г.Г. Петрова и А.Р. Кальчевский на основе материалов, предоставленных профессорско-преподавательским составом Российской экономической школы.

Комплект оценочных материалов одобрен и рекомендован к утверждению на заседании Совета Аспирантуры.

Протокол № 10/24 от 21.11.2024

# Содержание

Дисциплина, направленная на сдачу кандидатского экзамена по научной специальности 5.2.2 Математические, статистические и инструментальные методы в экономике . . .	6
Дисциплина, направленная на сдачу кандидатского экзамена по научной специальности 5.2.3 Региональная и отраслевая экономика . . . . .	8
Дисциплина, направленная на сдачу кандидатского экзамена по научной специальности 5.2.4 Финансы . . . . .	10
Дисциплина, направленная на сдачу кандидатского экзамена по научной специальности 5.2.5 Мировая экономика . . . . .	12
Дисциплина, направленная на сдачу кандидатского экзамена по научной специальности 5.2.6 Менеджмент . . . . .	14
История и философия науки . . . . .	16
Иностранный язык (английский) . . . . .	23
Макроэкономика 1 . . . . .	49
Макроэкономика 2 . . . . .	66
Макроэкономика 3 . . . . .	80
Макроэкономика 4 . . . . .	97
Макроэкономика 5 . . . . .	103
Математика для экономистов 1 . . . . .	109
Математика для экономистов 2 . . . . .	112
Математическая статистика . . . . .	123
Микроэконометрика . . . . .	135
Микроэкономика 1 . . . . .	139
Микроэкономика 2 . . . . .	143
Микроэкономика 3 . . . . .	150
Микроэкономика 4 . . . . .	163
Теория вероятностей . . . . .	183
Теория игр . . . . .	196

Эконометрика 1 . . . . .	206
Эконометрика 2 . . . . .	218
Эконометрика 3 . . . . .	220
Введение в маркетинговую аналитику . . . . .	231
Вычислительная макроэкономика. . . . .	242
Деривативы . . . . .	252
Дизайн рынков . . . . .	261
Дополнительные главы теории игр . . . . .	263
Корпоративные финансы . . . . .	272
Математические финансы . . . . .	283
Машинное обучение . . . . .	287
Машинное обучение: глубокий уровень . . . . .	294
Международная торговая политика . . . . .	301
Мировая экономика . . . . .	306
Отдельные главы прикладной международной торговли и финансов	307
Оценка активов . . . . .	308
Поведенческая экономика . . . . .	325
Прикладная микроэконометрика . . . . .	331
Риск – менеджмент . . . . .	343
Теория международной торговли. . . . .	349
Теория отраслевой организации . . . . .	355
Экономика организаций . . . . .	356
Эмпирика отраслевой организации . . . . .	368

---

# КОМПЛЕКТ ОЦЕНОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

---

Данный **комплект оценочных материалов** предназначен для оценки качества освоения программ аспирантуры по научным специальностям:

5.2.1 Экономическая теория,

5.2.2 Математические, статистические и инструментальные методы в экономике,

5.2.3 Региональная и отраслевая экономика,

5.2.4 Финансы,

5.2.5 Мировая экономика,

5.2.6 Менеджмент,

а также для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений поэтапным требованиям соответствующей программы аспирантуры. Оценочные материалы призваны обеспечить оценку качества знаний, приобретаемых выпускником программы аспирантуры.

При разработке комплекта оценочных материалов учитывались связи между включенными в них заданиями и навыками, позволяющими установить качество и уровень знаний аспирантов, степень их общей готовности к профессиональной деятельности.

**Дисциплина, направленная на сдачу  
кандидатского экзамена по научной специальности  
5.2.2 Математические, статистические и инструментальные  
методы в экономике**

---

**Задача 1: Оптимизационные модели в экономике**

Фирма производит один вид товара. Выручка фирмы описывается функцией  $R(q) = 100q - 2q^2$ , а издержки производства задаются функцией  $C(q) = 20q + q^2$ , где  $q$  — количество произведённого товара.

- a)** Запишите функцию прибыли фирмы.
- b)** Найдите оптимальный объем производства, максимизирующий прибыль фирмы.
- d)** Если государство вводит налог  $T = 10$  денежных единиц за каждую единицу товара, то каким станет новый оптимальный объём производства?
- e)** Как изменится максимальная прибыль фирмы после введения налога?

**Задача 2: Теоретико-игровые модели в экономике**

Два магазина (магазин А и магазин В) одновременно принимают решение об уровне цен на идентичный товар. Каждый магазин может выбрать либо высокую, либо низкую цену. Если оба магазина устанавливают высокие цены, то оба получают прибыль 100. Если один магазин ставит низкую цену, а другой высокую, то магазин с низкой ценой получает прибыль 150, а магазин с высокой ценой — 30. Если оба ставят низкие цены, то оба получают прибыль по 70.

- a)** Запишите эту игру в виде матрицы выигрышей (нормальная форма).
- b)** Найдите равновесие Нэша в чистых стратегиях в этой игре.
- c)** Является ли найденное равновесие оптимальным по Парето? Объясните.
- d)** Предположим теперь, что магазины играют эту игру бесконечное количество раз, имеют одинаковый фактор дисконтирования  $\delta$  и используют стратегии «грим-триггер» (начинают с высокой цены и продолжают ставить её, пока другой магазин не снизит цену; после первого же отклонения ставят низкую цену навсегда). При каких значениях фактора дисконтирования магазины смогут поддерживать сговор (оба устанавливают высокую цену)?
- e)** Какое экономическое поведение описывает эта игра? Приведите аналогию из реальной экономики.

### **Задача 3: Методы анализа больших данных**

Какие методы анализа больших данных используются в экономике? В чём идея регуляризации (например, LASSO)? Чем машинное обучение отличается от классической эконометрики? Какие проблемы возникают при работе с большими данными? Почему важна перекрёстная проверка?

### **Задача 4: Инструментальные переменные (IV)**

Что такое инструментальные переменные (IV), и для чего их используют в эконометрике? Какие условия должна удовлетворять хорошая инструментальная переменная? Что означает условие релевантности инструмента и как его проверить эмпирически? Что такое экзогенность инструмента и почему она важна? Назовите пример IV в экономическом исследовании.

### **Задача 5: Метод разности разностей (Difference-in-Differences, DiD)**

Что такое метод разности разностей (DiD)? Какие основные предположения лежат в основе метода DiD? Что означает предположение о параллельных трендах, и как его можно проверить? Приведите спецификацию DiD-регрессии и объясните компоненты. Как подтвердить, что оценки DiD отражают причинные эффекты, а не корреляцию?

## **Дисциплина, направленная на сдачу кандидатского экзамена по научной специальности 5.2.3 Региональная и отраслевая экономика**

---

### **Задача 1: Теоретические модели пространственной экономики**

Два города расположены на одной прямой на расстоянии 120 км друг от друга. В первом городе живет 100 потребителей, во втором — 200 потребителей. Планируется открыть новый магазин на линии между городами, потребители посещают магазин, который ближе к ним по расстоянию.

**a)** В какой точке (от первого города) стоит открыть магазин, чтобы привлечь максимальное число потребителей?

**b)** Предположим, потребители совершают покупки раз в месяц, а транспортные издержки

1 денежная единица на 1 км. Сколько будут составлять общие транспортные издержки всех потребителей в месяц при оптимальном расположении магазина?

**c)** Рассчитайте общие транспортные издержки, если магазин открыт ровно посередине между городами.

**d)** Насколько в процентах увеличатся общие транспортные издержки при переносе магазина из оптимальной точки в середину?

**e)** Что произойдет с оптимальной точкой, если население первого города вырастет до 300 человек?

### **Задача 2: Ценообразование в отраслях экономики**

Фирма действует на конкурентном рынке, её предельные издержки производства единицы товара составляют 50 руб. Рыночная цена товара 70 руб. за единицу.

**a)** Сколько товара будет производить фирма, если она максимизирует прибыль?

**b)** Какую прибыль будет получать фирма при продаже 100 единиц товара?

**c)** Как изменится производство, если цена на рынке упадет до 40 руб.?

**d)** Какова точка безубыточности фирмы?

**e)** Что произойдет с ценами и количеством фирм в долгосрочном периоде на этом рынке?



### Задача 3: Экономика образования

Государство решает, финансировать ли программу бесплатного высшего образования. Известно, что после получения высшего образования доход человека увеличивается с 40000 руб. до 70000 руб. в месяц.

**a)** Какой ежемесячный прирост дохода приносит высшее образование?

**b)** Чему равен совокупный прирост дохода за 30 лет трудовой деятельности?

**c)** Если стоимость обучения на одного студента 1 000 000 руб., оправданы ли государственные расходы на образование с точки зрения роста доходов населения?

**d)** Какие факторы могут сделать такую программу неэффективной?

**e)** Как можно повысить эффективность таких программ?

### Задача 4: Экономика здравоохранения

В больнице есть аппарат МРТ, который может проводить 10 обследований в день. Переменные затраты на одно обследование — 2000 руб., фиксированные ежедневные затраты — 6000 руб.

**a)** Какие ежедневные общие затраты больницы при полной загрузке аппарата?

**b)** Сколько должно стоить одно обследование, чтобы покрыть затраты при полной загрузке?

**c)** Сколько обследований минимально нужно делать в день по цене 3000 руб., чтобы покрыть затраты?

**d)** Что произойдет, если спрос вырастет до 15 обследований в день?

**e)** Как влияет наличие фиксированных затрат на ценообразование в здравоохранении?

### Задача 5: Экономика труда

Фирма нанимает работников с оплатой 500 руб./час. Предельный продукт труда (MP) первого работника — 15 единиц продукции, второго — 10, третьего — 5. Цена продукции — 100 руб./ед.

**a)** Какова предельная доходность (MRP) первого работника?

**b)** Сколько работников нанимает фирма?

**c)** Чему равна общая зарплата при найме двух работников на 8 часов?

**d)** Как изменится количество нанятых работников, если зарплата вырастет до 1100 руб./час?

**e)** Каковы последствия роста минимальной заработной платы для рынка труда?

## **Дисциплина, направленная на сдачу кандидатского экзамена по научной специальности 5.2.4 Финансы**

---

### **Задача 1: Банки и банковская деятельность**

Банк привлекает депозиты под ставку 5% годовых и предоставляет кредиты под 12% годовых. Норма резервирования составляет 10%, операционные расходы банка составляют 2% от суммы привлеченных депозитов.

- a)** Определите маржу банка по кредитам и объясните её экономический смысл.
  
- b)** Рассчитайте прибыль банка за год при условии привлечения депозитов на сумму 100 млн руб.
- c)** Как изменится прибыль банка, если норма резервирования увеличится до 20%?
  
- d)** В чём заключается риск процентной ставки для банка в данном случае?
  
- e)** Какие меры может принять банк для управления риском ликвидности?

### **Задача 2: Поведенческие финансы**

Инвесторы на рынке регулярно переоценивают свои способности к прогнозированию (оверкон- фиденс), что приводит к излишне частой торговле.

- a)** Как чрезмерная уверенность (оверконфиденс) влияет на доходность инвестора?
  
- b)** Объясните, как эффект предвзятости подтверждения (confirmation bias) может повлиять на решения инвестора?
- c)** Какие финансовые инструменты могут помочь инвесторам минимизировать влияние поведенческих ошибок?
- d)** Почему на финансовых рынках сохраняются поведенческие аномалии, несмотря на рациональность профессиональных инвесторов?
- e)** В чём суть поведенческой гипотезы «эффекта диспозиции»?

### Задача 3: Денежно-кредитная политика

Центральный банк РФ повысил ключевую ставку с 8% до 12% для борьбы с инфляцией, которая достигла 15%.

- a) Как увеличение ключевой ставки повлияет на спрос и предложение денег?
- b) Как изменение ставки повлияет на курс национальной валюты?
- c) Какие побочные эффекты может иметь долгосрочное повышение ставки?
- d) Какой временной лаг денежно-кредитной политики следует учитывать в этом случае?
- e) Почему Центральные банки предпочитают плавные изменения ставок, избегая резких движений?

### Задача 4: Прогнозирование финансовых рынков

Аналитик прогнозирует изменение валютного курса EUR/USD на основе данных о процентных ставках в США (3%) и Еврозоне (1%).

- a) Какой валютный курс (прямой или косвенный) в данном случае подвержен снижению?
- b) Каковы ограничения модели прогнозирования курса по паритету процентных ставок (IRP)?
- c) Как учесть инфляцию при прогнозировании валютного курса?
- d) Почему краткосрочные прогнозы курса часто неточны?
- e) Какими альтернативными методами можно повысить качество прогнозирования?

### Задача 5: Рынок страховых услуг

Страховая компания продаёт полис от пожаров, вероятность пожара 2%, ущерб 1 млн руб., стоимость полиса 30 тыс. руб.

- a) Определите ожидаемую прибыль компании на одном полисе.
- b) Как компания должна изменить премию, если вероятность пожара возрастает до 5%?
- c) Почему компании используют перестрахование?
- d) Какие регулятивные меры могут ограничить риск банкротства страховщиков?
- e) Как «моральный риск» влияет на рынок страхования?

## **Дисциплина, направленная на сдачу кандидатского экзамена по научной специальности 5.2.5 Мировая экономика**

---

### **Задача 1: Теоретические модели открытой экономики**

Малая открытая экономика описывается моделью IS-LM-VP при фиксированном валютном курсе. Происходит увеличение государственных расходов.

- a)** Как изменится равновесный уровень дохода и процентная ставка в краткосрочном периоде?
- b)** Какая корректировка произойдет из-за притока капитала при фиксированном валютном курсе?
- c)** В каких условиях такая фискальная экспансия окажется максимально эффективной?
- d)** Почему при плавающем валютном курсе такой эффект был бы слабее?
- e)** Как изменится платежный баланс страны после описанной фискальной экспансии?

### **Задача 2: Теоретические модели международной торговли**

В стране А трудозатраты на производство единицы вина составляют 6 часов, а на производство единицы ткани — 4 часа. В стране В трудозатраты на производство вина — 2 часа, а ткани — 2 часа.

- a)** Определите, какая страна обладает абсолютным и сравнительным преимуществом в каждом товаре.
- b)** Какой диапазон относительных цен товара «ткань» может сформироваться при торговле?
- c)** Каким будет направление торговли?
- d)** Почему страна В, имеющая абсолютное преимущество во всех товарах, заинтересована в торговле?
- e)** В каких случаях международная торговля может не принести выгод одной из стран?

### Задача 3: Международная трудовая миграция

Рассмотрим модель рынка труда двух стран: богатой (R) и бедной (P). Исходная зарплата в стране R равна 5000 долл., в стране P — 1000 долл. При миграции рабочей силы из страны P в R зарплата в R снижается, а в P — растёт.

- a) Что будет являться равновесием на международном рынке труда? b) Какова роль миграционных издержек в данном случае?
- c) Какие эффекты трудовая миграция оказывает на благосостояние в принимающей стране?
- d) Как трудовая миграция повлияет на распределение доходов в стране-отправителе?
- e) Как миграция влияет на долгосрочный экономический рост стран?

### Задача 4: Валютные курсы и международные рынки

Процентные ставки в США — 5%, в Европе — 2%. Текущий курс EUR/USD = 1.1. Ожидаемый курс через год 1.15.

- a) Рассчитайте ожидаемую доходность от вложений в доллар и евро.
- b) Какой валютный рынок находится в состоянии процентного паритета?
- c) Какая стратегия выгодна инвестору при данных условиях?
- d) Какие факторы могут препятствовать реализации арбитража?
- e) Как изменится ситуация, если ожидаемый курс будет равен 1.07?

### Задача 5: Международные организации

Страна подаёт заявку в ВТО.

- a) Какие требования предъявляет ВТО к новым членам?
- b) Как вступление в ВТО повлияет на внутренние рынки страны?
- c) Какие отрасли обычно проигрывают от вступления в ВТО?
- d) Какие преимущества вступления в ВТО получает страна?
- e) Какие меры поддержки может применять государство для минимизации негативных эффектов?

## **Дисциплина, направленная на сдачу кандидатского экзамена по научной специальности 5.2.6 Менеджмент**

---

### **Задача 1: Теория организации и организационные изменения**

Компания столкнулась с резким падением доли рынка и решает полностью перестроить организационную структуру с функциональной на дивизиональную.

- a)** В чем заключаются преимущества дивизиональной структуры для компании в кризисной ситуации?
- b)** Какие риски сопровождают переход от функциональной к дивизиональной структуре?
- c)** Какие мероприятия помогут компании минимизировать сопротивление персонала организационным изменениям?
- d)** Как оценить успешность проведённых организационных изменений?
- e)** Какие ошибки чаще всего допускаются при организационной перестройке?

### **Задача 2: Корпоративное управление и управление стоимостью фирмы**

Совет директоров компании принял решение о выкупе собственных акций (байбэк). Текущая рыночная цена акции — 200 руб., внутренне рассчитанная справедливая цена — 250 руб.

- a)** В чём состоит экономическое обоснование решения компании о байбэке?
- b)** Какой эффект оказывает байбэк на структуру капитала компании?
- c)** Какие существуют риски при проведении байбэка?
- d)** Какую роль играет корпоративное управление в принятии решений о выкупе акций?
- e)** Почему компании иногда предпочитают байбэк выплате дивидендов?

### **Задача 3: Управление интеллектуальной собственностью**

- a) Какие преимущества дает компании патентование технологии?
- b) В каких ситуациях компании невыгодно патентовать технологию?
- c) Какой метод оценки интеллектуальной собственности лучше использовать перед принятием решения?
- d) Как управлять рисками, связанными с утечкой информации о новой технологии?
- e) Какова роль интеллектуальной собственности в повышении конкурентоспособности фирмы?

### **Задача 4: Управление проектами и рисками**

Компания запускает инновационный проект с высоким уровнем неопределенности.

- a) Какие инструменты оценки рисков наиболее эффективны для такого проекта?
- b) Как выбрать оптимальный метод финансирования данного проекта?
- c) Какие показатели следует использовать для оценки успешности управления проектом?
- d) Какие ошибки допускаются чаще всего при управлении рисками инновационных проектов?
- e) Как снизить неопределенность и риски на начальных этапах проекта?

### **Задача 5: Антикризисное управление**

Компания столкнулась с финансовым кризисом из-за потери крупнейшего клиента.

- a) Какие первые шаги должен предпринять антикризисный менеджер?
- b) Какие инструменты финансовой реструктуризации могут быть применены?
- c) Как избежать демотивации сотрудников в кризисный период?
- d) Какие типичные ошибки допускают компании при антикризисном управлении?
- e) Как можно использовать кризис для развития компании?

---

## История и философия науки

---

### Общие проблемы философии науки

1. Понятие «парадигмы» и «междисциплинарной матрицы» в философии науки Т. Куна
2. Понятие научной революции. Нормальная и экстраординарная наука.
3. Типы преобразователей парадигм. Парадигма и инновация.
4. Концепция науки Ф. Бэкона.
5. Структура научного сообщества по Бэкону. Эвристическое значение идей Бэкона в отношении науки.
6. Концепция научной революции П. Дюгема.
7. Когнитивные мегамшины Л. Мэмфорда.
8. Основные гипотезы С.Тулмина.
9. «Язык структур» П. Шерера и его мировоззренческие основания
- 10.Методология П. Шерера (предельный переход от идей Н. Бурбаки).
- 11.Методология научных исследовательских программ И. Лакатоса. Критика концепции «нормальной науки» Т. Куна.
- 12.Понятие научной теории. Структура и функции теории.
13. Типы научных теорий.
14. Тезис Дюгема-Куайна, его значение для понимания структуры научного знания.
15. Философия науки В. Куайна. Категориалы наблюдения.
16. Искусство наблюдения. Эволюция понятия «наблюдение».
- 17.Эпистемология. Проблемно-решающий подход Дьюи
- 18.Проблема демаркации у К. Поппера. Учение о «трех мирах»
19. Эволюционная эпистемология. Поппер о дарвинизме.
20. Концепция роста научного знания по К. Попперу.



## Философские проблемы социально-гуманитарных наук

1. Позитивистская парадигма в социально-гуманитарных исследованиях. Ее основные онтологические и эпистемологические установки. Исторические и интеллектуальные факторы, повлиявшие на ее формирование.
2. Социология как «социальная физика» у О. Конта и Э. Дюркгейма. «Правила метода» Дюркгейма и их критика.
3. Идеи ОТС (общей теории систем) в социальной науке. Теория Н. Лумана и его ревизия структурного функционализма.
4. Интерпретационная парадигма в социо-гуманитарных науках. Ее основные онтологические и эпистемологические установки. Интеллектуальные истоки интерпретационной парадигмы: идеи В. Дильтея и Г. Риккерта.
5. Проект «понимающей социологии» у М. Вебера как критика позитивизма и трансцендентализма (Г. Риккерта).
6. Идеи феноменологии и их влияние на развитие интерпретационной парадигмы. Феноменологическая социология А. Шюца.
7. Социальный конструктивизм и его идейные истоки. «Социология знания» П. Бергера и Т. Лукмана.
8. Критическая парадигма в социо-гуманитарных науках. Ее основные онтологические и эпистемологические установки. Типы современных критических теорий. Спор вокруг идеи «политической ангажированности» социальной науки, а также роли нормативных теорий в социальных и политических исследованиях.
9. Классический марксизм как первая форма критической теории. Основные идеи классического марксизма. Его критика и развитие в неомарксизме. Оценка марксизма у Ж. – П. Сартра.
10. «Франкфуртская школа» как центр формирования и развития критической теории общества. Методологические установки Франкфуртской школы. Идеи М. Хоркхаймера и Т. Адорно.
11. Теория коммуникативного действия Ю. Хабермаса и ревизия идея Франкфуртской школы. Идеи Хабермаса и проект «консенсусной модели демократии». Критерии и условия «идеальной коммуникативной ситуации».
12. Спор о парадигмах общественного развития. Модернизационные теории (У. Ростоу, Д. Белл) и их критика у теоретиков «зависимого развития» (Р. Пребиш, Ф. Кардозу и др.). Идеи МСА (миро-системного анализа) у И. Валлерстайна.
13. Субстанциалистские и аналитические концепции истории. Принципы нарративной логики Ф. Анкерсмита. Критика «теоретической истории» у К. Поппера. «Смысл истории» и «смысл в истории».
14. Структурализм как междисциплинарная методология социально-гуманитарного познания. Формирование и основные принципы методологического структурализма. Онтологический структурализм и его критика.
15. «Критический структурализм» (постструктурализм) и принципы дискурсивного анализа Мишеля Фуко.
16. Нарративный реализм и нарративный идеализм. Особенности исторического нарратива и проблема истинности.

17. Теория перформативов Д. Остина и интенционалистские теории языка (П. Грайс и Д. Серль).

18. Язык и мышление. Рационалистические концепции языка и их критика. Концепции «лингвистической относительности» и идеи «генеративной грамматики».

## Темы рефератов

1. Экономические взгляды античных мыслителей Древней Греции и Рима (Ксенофонт, Платон, Аристотель).
2. Экономические учения эпохи Средневековья и генезиса рыночной экономики.
3. Меркантилизм как учение торговой буржуазии в эпоху первоначального накопления капитала. М. Лютер.
4. Зарождение классической политической экономии (Б. Франклин, У. Петти, Дж. Локк).
5. Формирование школы «экономистов» (физиократов).
6. Теория А. Смита как обобщение классической политической экономии XVII – XVIII вв.
7. Экономические идеи Т. Мальтуса.
8. Экономические идеи Д. Риккардо.
9. Теория капитала в классической политической экономии.
10. Теория дохода в классической политической экономии.
11. Теория воспроизводства и макроэкономического равновесия в классической политической экономии.
12. Влияние идей классической политэкономии на леворадикальную критику капитализма. Ранний социализм.
13. Концепции социально-экономических реформ в экономическом учении социалистов-утопистов и экономистов-романтиков.
14. Характеристика левого радикализма в экономической теории.
15. Теория стоимости в классическом и неклассическом направлениях экономической мысли.
16. "Маржиналистская революция". Генезис неоклассики (У.С. Джевонс, А. Маршалл, В. Парето).
17. Возникновение марксистской политической экономии.
18. Историческая школа в экономической теории.
19. Социальная школа и ранний институционализм.
20. Американский институционализм.
21. Особенности экономической мысли России в конце 18 - середине 19 вв. (Д. Голицын, А. Радищев, М. Сперанский, Н. Чернышевский).
22. Экономическая мысль России (1861 - 1917).
23. Развитие неоклассических теорий в экономике.
24. Развитие неолиберальных идей в экономике.
25. Историческое значение «кейнсианской революции» в экономической науке.
26. Й. Шумпетер как экономист и историк экономической мысли.
27. Отечественная экономическая мысль 1920-1930 гг. (В.И. Ленин, Н.Д. Кондратьев, С.Г. Струмилин, Л.В. Канторович).
28. Некейнсианство и «неоклассический синтез».
29. Характеристика послевоенного институционализма.
30. Монетаризм как школа консервативной экономической теории.
31. Политэкономия социализма в СССР (И.В. Сталин, Я.А. Кронрод, В.В. Новожилов).

32. Развитие экономической теории в странах Восточной Европы в 1950-1990-х гг. (страны по выбору).
33. Развитие экономической теории в странах третьего мира.
34. Становление теории маркетинга.
35. Становление теории экономики отраслей.
36. Развитие теории финансов и денежного обращения.
37. История статистики.
38. История развития математических методов в экономической науке.
39. Развитие теории бухгалтерского учета и анализа.
40. Развитие теории конкуренции.
41. Развитие теории инвестиций.
42. Эволюция теории о рынке с несовершенной конкуренцией.
43. Развитие теоретических взглядов на мировую экономику.
44. Развитие экономической науки в трудах нобелевских лауреатов по экономике (авторы по выбору).
45. Теории организации: от Г. Файоля до Минцберга.
46. Эволюция теории управления персоналом.
47. Эволюция экономики труда в советский период.
48. Экономика труда в классической политической экономии.
49. Развитие экономической теории труда.
50. История идей о содержании понятия «вознаграждение за труд».
51. История организации заработной платы в России.
52. Особенности рыночного механизма оплаты труда: от индустриального до постиндустриального общества.
53. Учение А.Смита о налогах и его влияние на развитие налоговой теории и практики.
54. Налоговая теория в маржиналистской школе.
55. Налоговая теория в экономических взглядах монетаристов.
56. Развитие налоговой теории в работах российских экономистов в XIX – XX в.
57. Развитие западных теорий о народонаселении в конце XIX – нач. XX вв.
58. Фактор пространства в истории экономической мысли.
59. Зарождение первых теорий размещения производства.
60. Из истории взглядов на региональную специализацию.
61. Российская школа региональных экономических исследований.
62. Основные этапы развития теории экономического районирования в России.
63. История становления науки природопользования.
64. Формирование экономики природопользования в трудах российских экономистов.
65. Становление концепции устойчивого эколого-экономического развития общества.
66. История общего менеджмента.
67. История специального менеджмента.
68. История прикладного менеджмента.
69. Формирование научного менеджмента на уровне предприятий.

- 
70. История финансового менеджмента.
  71. История теории принятия управленческих решений.
  72. Философия управления: история и современность.
  73. Этапы развития теории организации.
  74. Зарождение и развитие бухгалтерского учета в античности.
  75. Развитие бухгалтерского учета в Западной Европе в эпоху Возрождения.
  76. История бухгалтерского учета в России.
  77. Становление и развитие туризма как отрасли экономики.
  78. Концепции планового хозяйства в России в 1920-х гг.
  79. Экономические идеи о социализме в работах отечественных и зарубежных ученых.
  80. История трансформации мирового хозяйства.
  81. Эволюция теории международной торговли.
  82. История науки о финансах.
  83. Вклад отечественных ученых в развитие науки о финансах.
  84. Эволюция теории налогов
  85. Развитие методов моделирования экономики в работах лауреатов нобелевской премии: Д. Хакса, Р.Солоу, В. Леонтьева, П. Самуэльсона.
  86. Этапы развития методов линейного программирования в решении экономических задач.
  87. Становление математического моделирования экономики в России в начале XX в. (по работам В.К. Дмитриева и Е.К. Слуцкого).

**Темы для собеседования на семинарских занятиях**

по дисциплине «История и философия науки»

Становление социально-гуманитарных наук. Антропоцентризм Ренессанса. Социальная механика и натурализм 17-19 веков. Науки о культуре: 1) «философия жизни» и поиск нового предмета исследования, 2) неокантианцы и поиск нового метода исследования. Мишель Фуко «Слова и вещи»: археология гуманитарного знания, три глобальные эпистемы. Особенности современного социального познания. Общество как объект познания. Задачи социально-гуманитарных наук (выявление закономерностей, структурирование). Субъект и объект СГН. Смыслы (вещь как носитель смысла) и ценности. Текстовая природа объекта исследования. Семиотика. Диалогичность познания. Множественность парадигм. Специфика методов СГН. Наблюдение простое и включенное, интроспекция и эмпатия. Этнометодологический подход. Социальный эксперимент. Компаративистский метод: поперечные срезы, лонгитюд. Анализ документов. Опрос: анкетирование, интервью. Монографический метод. Биография. Проективные методы. Тестирование и социометрия. Игровые методы. Иконография. Принципы социально-гуманитарного исследования: терпимость, условность, аполитичность, антиактивизм, гуманизм. Философия истории. Анри Сен-Симон: общество как организм и принцип историзма. Георг Гегель: всемирная история как прогресс в сознании свободы. Карл Маркс и Фридрих Энгельс: всемирная история как прогресс в сфере материального производства. Философия истории Карла Ясперса: «осевое время». Николай Данилевский: культурно-исторические типы. Освальд Шпенглер: культура и цивилизация. Арнольд Тойнби: локальные цивилизации. Философские проблемы социологических наук. Социология как «социальная физика» у Огюста Конта и Эмиля Дюркгейма: социальная статика и социальная динамика, три стадии общественного прогресса, правила социологического метода. Макс Вебер и его «понимающая социология»: естественные и социальные науки, «идеальный тип» в социологии и истории. Теория социальных систем Никласа Лумана: три предубеждения в социологии, общество как аутопойезис коммуникаций. Феноменологическая социология: Альфред Шюц, Гарольд Гарфинкель, Питер Бергер и Томас Лукман. Критические теории общества.

Классический марксизм. «Франкфуртская школа». Идеи Макса Хоркхаймера и Теодора Адорно. Теория коммуникативного действия Юргена Хабермаса. Проект «консенсусной модели демократии». Критерии и условия «идеальной коммуникативной ситуации».

---

## Иностранный язык (английский)

---

### Задания для промежуточной аттестации

1. Scan the article as quickly as you can and tick the information that is mentioned. Do not read it carefully word by word.

- (a) the first fast food restaurant
- (b) animals kept for profit
- (c) a domestic fowl
- (d) feeding methods
- (e) a building to house animals
- (f) a hygiene issue
- (g) a health problem related to the ears
- (h) a machine that minces meat

With fast food chains becoming more popular and people's attempts to make meals more quickly and cheaply, livestock is now raised differently than it was in days gone by. Many domestic animals will never breathe fresh air outside nor eat off the land. Chickens that live indoors their entire lives are fed grains which include antibiotics to help them grow faster until they are deemed large enough to butcher. Cattle farms are not what they used to be either. Cows usually start life in fields before they are sold to the meat production industry. Huge factory-like structures can house thousands of these large animals, but this can have huge implications for food safety because such cattle live in their own manure. The cattle are given growth hormones in their ears to help them grow faster. Once they are sufficiently fattened up, they are sent to slaughterhouses, where they are processed into cuts of meat and what's left is sent to the grinder. After that, the processed meat is made into burger patties and shipped to fast food restaurants for everyone to enjoy.

2. Choose the correct answer.

- (a) It was a \_\_\_\_ occasion whose importance was not realized at that time.
  - Historic
  - Historical
- (b) Do you enjoy reading novels?
  - Historic
  - Historical
- (c) If only we could solve all the problems of the world with the flick of a \_\_\_\_ wand.

- Magic
  - Magical
- (d) It is not \_\_\_\_ to take another loan now.
- Politic
  - Political
- (e) That scandal destroyed his \_\_\_\_ career.
- Politic
  - Political
- (f) The experience was purely \_\_\_\_.
- Magic
  - Magical
3. (a) What is being implied by this sentence?  
Informal discussions and sharing of ideas between staff (teachers and teaching assistants) were useful but insufficient to promote consistency of approach and better progression.
- (b) What is being implied in this sentence?  
In primary schools, some teachers lack the specialist knowledge needed to teach PE well and outcomes for pupils are not as good as they could be.
- (c) What is being implied in this paragraph?  
Although the survey uncovered areas of good practice, the quality of transition between Key Stages 2 and 3 in English was too often no better than satisfactory. The lack of regular communication and exchange of ideas between primary and secondary schools created problems for continuity in teaching and assessment.
4. Rewrite the sentences using inversion with adverbial phrases so the meaning is the same:
- (a) They opened the exam paper and immediately began to panic.
  - (b) The central bank would consider the move only if the economy got much stronger.
  - (c) You cannot leave the exam room unescorted under any circumstances.
  - (d) He didn't feel nervous until he stood at the podium ready to speak.
  - (e) I was not only leaving a special place, but also my family and friends.
  - (f) He finally left the stage after he had fully soaked up the rapturous applause.
5. Complete the extracts with the correct form of the verbs in the box:

Clench	drum	fold	raise	roll	scowl	shake	shrug	tap	yawn
--------	------	------	-------	------	-------	-------	-------	-----	------



- 
- (a) 'Can I just ask a question?' he said, tentatively \_\_\_\_ his hand.
- (b) 'I totally disagree', she said firmly, \_\_\_\_ her head.
- (c) Stella stood there with her arms \_\_\_\_ and a disapproving look on her face.
- (d) He \_\_\_\_ his fists in a mixture of frustration and anger.
- (e) 'OK, so what do we do now?' she asked, \_\_\_\_ her fingers on the desk.
- (f) 'Don't \_\_\_\_ your eyes at me in that manner,' she told him.

6. Put the sentences in the correct order to complete the email:

- (a) Marta Masini joined Waterwells Books January last year and since then she has been a reliable, effective and valuable member of the sales team.
- (b) Below is my reference for Ms Marta Masini.
- (c) I believe that Marta will be a valuable addition to any organization that she may join. While we regret Marta's decision to move on, I would recommend her without hesitation.
- (d) Yours faithful,  
Carmen Napoli.
- (e) Please get in touch if you should require any further information.
- (f) Dear Sir or Madam,
- (g) She has consistently showed that she is able both to work independently and as part of a team.
- (h) Marta is professional and efficient in her approach to work and she has a sound knowledge and understanding of both the book-selling business and the wider retail industry.

7. Study Fig. 1, then complete the accompanying description by adding the words and phrases from the offer below. Refer to the graph for the necessary dates and figures.

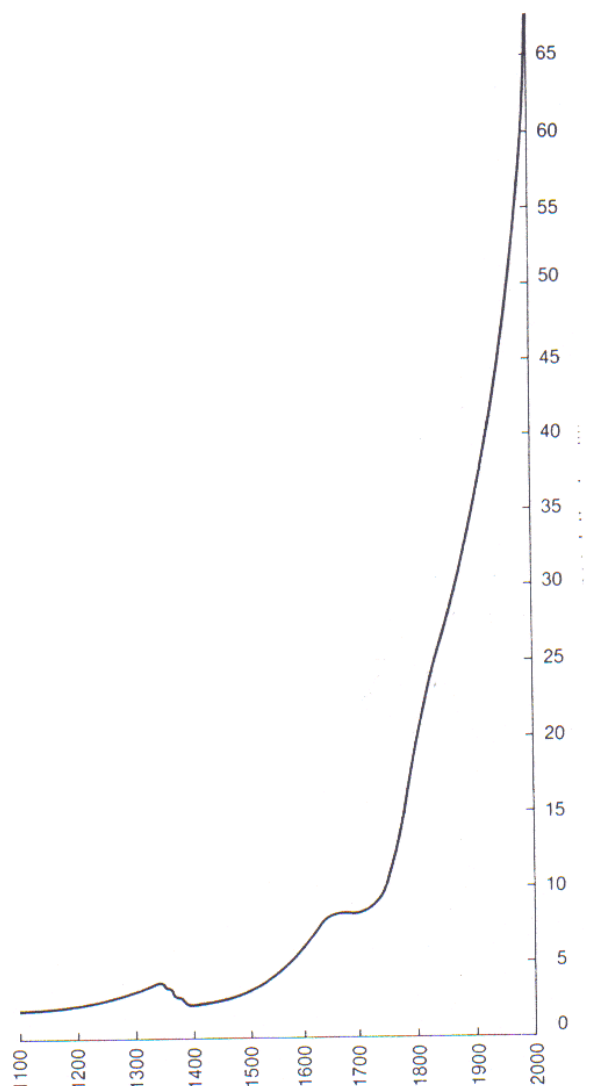


Fig. 1 The population of Great Britain 1100–2000

### *The growth of the population of Great Britain*

Like most countries, Great Britain's population has grown rapidly. Fig. 1 (1) \_\_\_\_\_ the population of GB since 1100. (2) \_\_\_\_\_ the population (3) \_\_\_\_\_ 2.5 million (4) \_\_\_\_\_ 4 million in the first part of the 14th century. Then the population (5) \_\_\_\_\_ approximately 2.5 million as a result of the "Black Death" plagues of 1361, 1371, and 1382. There was (6) \_\_\_\_\_ population until the 17th century, when it (7) \_\_\_\_\_ approximately 8 million. That (8) \_\_\_\_\_ until the first half of the 18th century, when the population (9) \_\_\_\_\_, reaching 36 million in 1900 and 46 million in 1920. If (10) \_\_\_\_\_, (11) \_\_\_\_\_ the population of GB (12) \_\_\_\_\_ 65 million in the year 2000.

to

*illustrates the rise in*

*level was maintained*

*a steady rise in*  
*it is estimated that*  
*The graph shows that*  
*the present trend is maintained*  
*declined to*  
*levelled off at*  
*rose from*  
*began to rise rapidly*  
*will reach*

8. Expand the notes and write a paragraph. Use passive reporting structures for the verbs in italic.

*estimated* / global energy consumption / increase by around 50% by 2050.

*thought* / half / growth / come from China and India.

moment / China and India consume about 21% / world energy / but / *expected* / 31% / middle of the century.

also / *calculated* / China / use around 60% more energy than the US by 2050.

9. Read the following text critically and select at least five weaknesses. The text is adapted from material published in *The Economist*, a non-academic source.

#### *Rule Britannia*

“Rule Britannia”, Britain’s unofficial national anthem dating from 1740, celebrated not only Britain’s military might but its commercial prowess as well. A century later saw the high-water mark of its influence in the world, which coincided with the last great wave of globalisation. The first country to industrialise, Britain was soon turning out more than half the world’s coal, pig-iron and cotton textiles. In 1880 its exports of manufactured goods accounted for 40% of the global total, and by 1890 it owned more shipping tonnage than the rest of the world put together.

Less than a century on from those glory days Britain had become the “sick man of Europe”, infamous for wild swings in inflation and growth and for confrontational trade unions. Shorn of its empire and a late and reluctant arrival in the European Community, Britain was grappling with the prospect of irreversible decline.

Britain’s fortunes are looking up again. Steady economic expansion in the past 14 years has pushed its GDP per head above that of France and Germany. Its jobless figures are the second-lowest in the European Union. Inflation has been modest, and sterling is if anything too strong for Britain’s good.

Much of this transformation is due to a quarter-century of profound policy change at home. The Conservatives in government tamed the unions, freed financial markets, and unloaded a host of state-owned enterprises. A wrenching decade

resulted in a more flexible and competitive economy, though also a more unequal and less cohesive society. A Labour government under Tony Blair sensibly built on its predecessors' work but tried to combine free markets with social justice.

Yet globalisation too has played a big part in defining the Britain that is emerging now. Barriers to the free flow of goods and services, labour and capital are being pulled down around the world, aided by huge improvements in communications and transport. Most countries are embracing market capitalism, including titans in the developing world. It is not just their tennis shoes and computers that are conquering the globe but, increasingly, their software and services, and indeed their capital. Most important, perhaps, they have vast pools of relatively cheap and increasingly skilled workers who put pressure on jobs and wages in rich countries.

Allied with technology, globalisation increases competition and exposes inefficiency. It tends to lessen inequality among countries and increase it within them. In short, though the overall effect is positive, there are losers as well as winners. But Britain is successfully riding the current wave of globalisation.

10. Rewrite the sentences using the words given:

- (a) I wasn't aware that there was a deadline at all. (of)
- (b) I'm determined not to get behind with things again (that)
- (c) She was upset that she wasn't told any sooner (about)
- (d) He's not so keen on us going on the training course (that)
- (e) I was pleased that I was given the opportunity (to)
- (f) I'm not conscious of any decision being made (that)
- (g) I was delighted to be even considered for the post (that)
- (h) We have decided that we are not going ahead with the project (against)

11. Complete the news extracts with the words in the box:

ambition dropping fall heart it make out realizing set throw towel wayside

Mark Zuckerberg, Steve Jobs and Bill Gates are well documented for 1) \_\_\_\_\_ 2) \_\_\_\_\_ of university to pursue their ambitions. But, according to a recent study, for every success story, there are many who say they regret the decision to not finish their studies. The research suggests that if you want to 3) \_\_\_\_\_ 4) \_\_\_\_\_ in your chosen field or profession, then a university education is still the best start you can get.

Local hero Ella Franklin 5) \_\_\_\_\_ her 6) \_\_\_\_\_ on becoming a professional footballer and playing for her country at the age of eight and today, is on the verge of 7) \_\_\_\_\_ her 8) \_\_\_\_\_. She has for the first time been named in the provisional national squad. 'It's been a hard journey and I've seen many players 9) \_\_\_\_\_ by the 10) \_\_\_\_\_ or for various reasons 11) \_\_\_\_\_ in the 12) \_\_\_\_\_, but for me

---

it's all I've ever wanted to do. It's been hard work and there have been a lot of sacrifices along the way, but if I get selected, then it's all been worth it.'

12. Complete the sentences with the expressions describing success:

- (a) It has been said that you have \_\_\_\_\_ success when you don't know whether what you're doing is work or play.
- (b) With the last known case in Bangladesh in 1975, the eradication of smallpox is one of the great success \_\_\_\_\_ of our time.
- (c) The game Angry Birds became an \_\_\_\_\_ success after its release in 2009, with 15 million official downloads in its first year. However, its creator, Rovio entertainment, had previously launched 50 similar games with \_\_\_\_\_ success.
- (d) Comedienne Joan Rivers said the \_\_\_\_\_ of her success was that she put into words what people were secretly thinking.
- (e) Sir Alex Ferguson, the most successful football coach of all time, believed that his risk-taking mentality was \_\_\_\_\_ to his success. He also claimed that if a team is genuinely \_\_\_\_\_ of success, it is far more likely to win.
- (f) Harry Potter author J. K. Rowling approached a dozen publishers \_\_\_\_\_ success before she was offered a publishing deal.
- (g) In vitro fertilization has a success \_\_\_\_\_ of about 35% for younger women. This drops steadily with age.
- (h) The model of starting something simply and building a community around it, as demonstrated by the likes of Facebook and Twitter, has been success.

13. Write a cover letter for the position you are going to apply for.

14. Write an essay to respond to the sources below. In the essay you should:

- refer to all four of the key points you have identified
- make your own opinion on the topic clear in the conclusion
- use a neutral or formal style
- write 240-280 words
- use appropriate linking devices
- proofread the essay for grammar and vocabulary mistakes

*Source 1*

In the past, many societies venerated their elders, but now they are often forgotten, those without families may be left to rely on the state to look after them, if there is even such a support system in place, rather than being supported by their communities. Another problem is governments are moving towards being "digital only", so older people can feel left behind or neglected by society as a whole.

*Source 2*

Thanks to advances in modern healthcare, our aging population is staying fitter for longer, able to enjoy working well past retirement age if they so choose, or have an active retirement if not. Older family members also provide valuable support to their younger counterparts, for example through providing childcare which enables both parents to go to work. This reliance on older members of society is a valuable asset.

15. Find and correct the errors in the email. Rewrite it to make it more formal.

*Hello Professor Smith,*

*I'm sorry to tell you but im sick and will not be able to come to class. See you Wednesday.*

*Jason*

16. Prepare a report on inequality in country N.

*Requirements:*

- the topic is to be pre-approved by the instructor;
- length: 4-5 minutes;
- visual materials are optional;

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Тема 1. Language and Communication.

1. When reading a text for the first time, you should skim over it to grasp the main idea. In this example, read the highlighted text and quickly look over the rest of the text:

*Are electric cars really eco-friendly?*

Electric-car drivers are saving the planet, right? Their vehicles produce none of the pollutants that dinosaur-burning, fossil-fuel-powered machines do. That is the standard view, and governments around the world provide incentives to encourage the uptake of this new technology.

The Tesla Model S is a 100% electric vehicle. It does not have an exhaust to emit from. So what happened?

Instead of an expected rebate of around S\$15,000 (US\$10,800) he received a fine of the same amount for being a gross polluter. The company commented the incident, "The Model S that our customer imported into Singapore left our factory only two years ago with energy consumption rated at 181 Wh/km. This qualifies as the cleanest possible category of car in Singapore and entitles the owner to an incentive rather than a fine."

The Singapore authorities calculated the "carbon cost" of generating the electricity that will be used to charge the car. This is the elephant in the trunk of electric vehicles. Where and how the power is produced is not often considered, but perhaps it should be. Let's move the elephant up to the passenger seat and address it directly.

The authorities in Singapore apparently found the Tesla in question consumes 444 watt-hours of electricity per km (Wh/km) in tests. Without wanting to get too maths-heavy, the number of 444Wh/km does seem high. And as we still need power stations to produce such amount electric energy, the environmental impact is not so small as it seemed to be. But what about the bigger picture - should we be factoring in the emissions of power stations when working out how green an electric car is? The logical answer is yes. Emissions shifted elsewhere are still emissions, and CO2 impacts the global atmosphere wherever it is released.

After you've skimmed the text, you should get the general idea: *one man imported an electric car to Singapore and was fined for that, because the car was considered as a polluter. It turned out that electric cars can also be dangerous for the environment, because electric energy used to charge them is produced at power stations, which emit pollutants.*

Now let's look at the questions:

- (a) What is the aim of this text?  
 A. To discourage people from visiting Singapore  
 B. To prove that electric cars are less eco-friendly than fossil-fuel-powered machines  
 C. To show that we need to count the emissions of power stations to see how green an electric car is.
- (b) When the owner of the electric car went to Singapore, he received  
 A. a rebate of around US\$10,800  
 B. a fine of around US\$10,800  
 C. a fine of around US\$15,000
- (c) To prove that electric car was a gross polluter, the authorities in Singapore calculated the \_\_\_\_\_ of generating the electricity to charge the car.
2. Choose the correct reporting verb from this list and finish the reported speech for each example.

Told	Suggested
Said	Asked
Advised	Offered
Warned	Ordered

- (a) "I'd go and see a doctor if I were you," Julie said to me.  
 Julie \_\_\_\_\_ me to go and see a doctor.
- (b) "Can you come and help me with this box?"  
 John \_\_\_\_\_ me to help him with the box.
- (c) "This is an exam Mr. Jenkins!! Shut up now!!!"  
 The headmaster \_\_\_\_\_ Mr. Jenkins to shut up.
- (d) "That road is very dangerous so just be very careful!"  
 His mother \_\_\_\_\_ him that the road was very dangerous and to be careful.
- (e) "Liverpool won the match last night."  
 The journalist \_\_\_\_\_ that Liverpool had won the match the previous night.
- (f) "Why don't we go and see that new film at the cinema."  
 Bill \_\_\_\_\_ going to see the new film at the cinema.
- (g) "I can come and look after the children tomorrow night."  
 Jane \_\_\_\_\_ to come and look after the children the following day.
- (h) "The lesson starts at six o'clock in the evening."  
 The teacher \_\_\_\_\_ us that the lesson started at six in the evening.
3. Some adjectives end in -ic and some end in -ical. Since there is no rule, it is not easy to find out which form is correct in a particular case. Choose the correct answer:



- (a) She is interested in learning \_\_\_\_\_ languages.
- Classic
  - Classical
- (b) She had a \_\_\_\_\_ expression on her face.
- Comic
  - Comical
- (c) I enjoy watching \_\_\_\_\_ movies.
- Comic
  - Comical
- (d) A lot of people believe that the government's \_\_\_\_\_ policy is in the ruins.
- Economic
  - Economical
- (e) I want to buy an \_\_\_\_\_ car.
- Economic
  - Economical
- (f) He is doing masters in \_\_\_\_\_ engineering.
- Electric
  - Electrical

## Тема 2: Human Interaction.

1. Complete the extracts using the correct past form of the verbs in the box:

have limit make measure weigh account communicate mark propose rise  
will/become work be not/be can/produce can/also/produce develop discover  
invent require seek start use

- (a) The first telephone call from a hand-held mobile phone \_\_\_\_\_ in 1973. Until then, mobile telephony \_\_\_\_\_ to phones installed in cars. The phone used for this call, produced by Motorola, \_\_\_\_\_ approximately 2 kg, \_\_\_\_\_ 23 x 13 cm and \_\_\_\_\_ a talk time of 13 minutes.
- (b) In the late 1980s, computer scientist Sir Tim Berners-Lee, who \_\_\_\_\_ for CERN at that time, first \_\_\_\_\_ what \_\_\_\_\_ the World Wide Web. This \_\_\_\_\_ the beginning of the modern Internet as we know it today and it had immediate impact on global communication. In 1993, it \_\_\_\_\_ for 1% of all telecommunicated information, which \_\_\_\_\_ to 51% by 2000 and, by 2007, more than 97% of all information passing through telecommunications networks \_\_\_\_\_ by the Internet.
- (c) People \_\_\_\_\_ a range of paper-like materials such as papyrus and parchment for a long time before paper \_\_\_\_\_ in ancient China around 2,200 years ago. However, these original materials \_\_\_\_\_ expensive, in limited supply or \_\_\_\_\_ extensive preparation, so an alternative \_\_\_\_\_. People soon \_\_\_\_\_ that paper made from wood \_\_\_\_\_ easily, cheaply and in almost every location. And, after large scale manufacturing techniques \_\_\_\_\_, it \_\_\_\_\_ for another 1,000 years or so that papermaking and manufacturing \_\_\_\_\_ in Europe.

2. Complete the news extracts with the words in the box:

Hardly Never before No sooner Not until Only by Only when So  
Such

- (a) \_\_\_\_\_ unexpected was the announcement that even the minister's own colleagues were taken by surprise.
- (b) \_\_\_\_\_ he arrived at the conference centre, did the minister realize the extent of ill-feeling he had generated.
- (c) \_\_\_\_\_ was the second edition of the book on sale than the third and fourth were being planned.
- (d) \_\_\_\_\_ was the hectic pace of the game, it came as no surprise when Miller quickly netted his second.
- (e) \_\_\_\_\_ both sides agree to and hold an unconditioned ceasefire, will talks be possible.

- 
- (f) \_\_\_\_\_ had the dust begun to settle on the expenses accusations when he was implicated in the cash-for-questions scandal.
- (g) \_\_\_\_\_ being united will they have any chance of defeating the government.
- (h) \_\_\_\_\_, at all the meetings that I have attended, have I seen such enormous attendances as I have seen this campaign.

3. Rewrite the sentences using the verbs in italics so the meaning is similar:

- (a) It's possible that the Internet wasn't working earlier. *Might*.
- (b) It was a really bad move to phone him. I regret it now. *Should*.
- (c) I couldn't get hold of them. I think I might have the wrong number. *Able*.
- (d) My grandparents would often call me for a long chat at weekends. *Used*.
- (e) I never used to want to go to bed as a child. *Would*.
- (f) Sarah wasn't in the office yesterday so it's impossible that you spoke to her. *Can't*.
- (g) Maybe you told me, but I can't remember to be honest. *Could*.
- (h) He constantly used to be on his phone, whether it was WhatsApp or Facebook or whatever. *Would*.

### Тема 3: Risks and Hazards.

1. Cause-effect markers. Complete each sentence with one or two words.

- (a) Rises in the price of oil cause inflation and, as \_\_\_\_\_, there is upwards pressure on pay.
- (b) Due \_\_\_\_\_ the increase in rents, many of the area's tenants are being forced to move out.
- (c) Older information is stored offsite \_\_\_\_\_ of a lack of space within the main office.
- (d) A small businessman might not have an HR department; the owner may \_\_\_\_\_ have to take care of personnel issues.
- (e) Internet marketing can automatically measure its own success \_\_\_\_\_ web-sites provide convenient access data.
- (f) Owing to \_\_\_\_\_ that the first few performances attracted very small audiences, the show was cancelled at the end of its first week.

2. Countable and uncountable nouns. Fill in the gap using one of the nouns below and a necessary article.

coincidence phenomenon consequence evidence disease occurrence  
decrease

- (a) It's not \_\_\_\_\_ that none of the directors are women.
- (b) Two hundred people lost their jobs as \_\_\_\_\_ of the merger.
- (c) There is \_\_\_\_\_ convincing \_\_\_\_\_ of a link between exposure to sun and skin cancer.
- (d) Globalization is \_\_\_\_\_ of the 21st century.
- (e) Vandalism used to be \_\_\_\_\_ rare \_\_\_\_\_ here.
- (f) There has been \_\_\_\_\_ of nearly 6% in the number of visitors to the museum.
- (g) A fatty diet increases the risk of \_\_\_\_\_ heart \_\_\_\_\_ .

3. *Dr Syal is advising one of his dissertation students who is interested in pollution in road tunnels. Complete the conversation. You are sometimes given the first letter to help you.*

*Dr Syal:* You could c\_\_\_\_\_ the total number of private cars that use the tunnel each week, based on the day-to-day figures, and get an a\_\_\_\_\_ figure for how much carbon they're all emitting.

*Melissa:* How p\_\_\_\_\_ would that figure have to be?

*Dr Syal:* Oh, it doesn't have to be exact, you just need to e\_\_\_\_\_ more or less what the total pollution will be. Then you can check to see if those figures t\_\_\_\_\_ with the figures that have already been published for similar tunnels. And the figure won't be c\_\_\_\_\_ of course; it'll go up and down depending on lots of factors such as weather conditions, average speed, etc.

*Melissa:* But can we say if the figures will be true for the future too?

*Dr Syal:* Well, we do know that the traffic growth has been c\_\_\_\_\_ over the past ten years; it hasn't ever gone down, so I think you can make some useful predictions.

*Melissa:* Should I present each daily total as a d\_\_\_\_\_ item or can I just put them all together into one figure for each week?

*Dr Syal:* A weekly total is fine, and you can \_\_\_\_\_ it up or \_\_\_\_\_ to the nearest 100.

*Melissa:* Right, OK. Thanks so much for your help.

### Тема 4: Economic Resources.

1. Complete the text using the passive form of the verb in the box.

be	embed
introduce	test
develop	generate (x2)
place	

In 2010, in Toulouse, France, a pilot scheme (1) \_\_\_\_\_ to power street lights using energy (2) \_\_\_\_\_ by the feet of pedestrians passing by. A number of pressure-sensitive modules, (3) \_\_\_\_\_ with electricity producing microsensors, (4) \_\_\_\_\_ under sections of pavement in the city center. The idea of using human footsteps to generate electricity in this way had been around for a long time, but this was the first time that such a scheme was able to (5) \_\_\_\_\_ on the street. Until then, the modules were unsuitable for street use as, according to the designers, Dutch company SDC, they needed (6) \_\_\_\_\_ “virtually jumped on” for enough power to (7) \_\_\_\_\_. However, a model (8) \_\_\_\_\_ on which you could walk normally and still produce enough energy to power nearby lights.

2. Rewrite the sentences using nominalization.

- (a) It looks like they didn't think about the design very much.  
It doesn't look like much thought was given to the design.
- (b) They didn't allow for any delays in the development process.  
No \_\_\_\_\_.
- (c) We have duly considered everything in making this decision.  
Due \_\_\_\_\_.
- (d) A number of people complained about the service.  
A number of \_\_\_\_\_.
- (e) I am pleased to say that we have agreed on most aspects of the deal.  
I am pleased to say that \_\_\_\_\_.
- (f) It is clear that we need to prioritize renewable energy sources.  
It is clear that \_\_\_\_\_.
- (g) Initial reports suggest that the parties seem to have compromised regarding CO2 emission quotas.  
Initial reports suggest \_\_\_\_\_.
- (h) We progressed significantly regarding trade in ozone-depleting substances.  
Significant \_\_\_\_\_.

3. Rewrite the sentences using the words in brackets.

- (a) Spot prices for metals did not rise or fall in this period despite the turbulence in the oil and textile markets. (stable)
- (b) Visitor numbers at the Sizewell education centre increased by 14% in the period 2007-2009. (increase – noun)
- (c) It can be imagined that modern medicine will continue to extend human life. (plausible)
- (d) The sales totals for fine art at the auction house were at their highest level for twenty years in 2009. (peak – noun)
- (e) There was a slight fall in house prices in Cumbria in the first half of 2012. (slightly)
- (f) “What you say may be relevant, but I disagree with your order of priority.” (a point)
- (g) Payday loan companies reported that there was three times as much demand for their services during the Christmas period in 2017. (trebled)
- (h) The number of complaints to the BBC over offensive language rose steeply throughout the 1990s. (rise – noun)

**Тема 5: Bringing about Change.**

1. The following sentences are mixed formal and informal. Write F (formal) or I (informal) after each sentence.
- (a) The project will be completed next year.
  - (b) I showed that his arguments didn't hold water.
  - (c) I wonder why he put up with those terrible conditions for so long.
  - (d) Five more tests will be necessary before the experiment can be concluded.
  - (e) It is possible to consider the results from a different viewpoint.
  - (f) It has been proved that the arguments so far are without foundation.
  - (g) He'll have to do another five tests before he can stop the experiment.
  - (h) It is not clear why such terrible conditions were tolerated for so long.
  - (i) There are a number of reasons why the questionnaire should be revised.
  - (j) We'll finish the job next year.

2. Combine the sentences using a relative clause. Use relative pronouns only where necessary. Note that you have to use commas in some of the sentences.

*A holiday in Scotland*

- (a) We spent our holiday in Scotland last year. Scotland is in the north of Great Britain.  
*Last year we spent our holidays in Scotland, which is in the north of Great Britain.*
- (b) People live in Scotland. They are called Scots.  
The people \_\_\_\_\_.
- (c) We first went to Edinburgh. Edinburgh is the capital of Scotland.  
We first \_\_\_\_\_.
- (d) Arthur Conan Doyle was born in Edinburgh. He wrote the Sherlock Holmes stories.  
Arthur Conan Doyle \_\_\_\_\_.
- (e) Then we visited a lake. It is in the Highlands.  
The lake \_\_\_\_\_.
- (f) Loch Ness is 37 km long. People know it for its friendly monster.  
Loch Ness \_\_\_\_\_.
- (g) There we met an old man. He told us that he had seen Nessie.  
An old man \_\_\_\_\_.
- (h) We then travelled to a mountain. The mountain is near the town of Fort William.  
We then \_\_\_\_\_.



(i) The mountain is the highest mountain in Great Britain. It is called Ben Nevis.

The mountain \_\_\_\_\_.

(j) I sent you a postcard. It was written on the summit of Ben Nevis.

The postcard \_\_\_\_\_.

### Тема 6: The Meaning of Success.

1. The dictation computer prints exactly what it hears. Sometimes, however, there is more than one possibility and the computer makes a mistake. Find the errors in the computer's work in the left-hand column. Then match the sentences with their responses in the right-hand column. Use the responses as clues if you have difficulty finding the mistakes.

- |  |   |
|--|---|
| 1. Alaska if she wants to come with us.                              | a. Who changed into civilian clothes?                   |
| 2. I can pose music for TV programmes.                               | b. Yes; I saw him going into the kitchen.               |
| 3. The office has changed into civilian clothes.                     | c. You'll ask who?                                      |
| 4. Did you see the way to go? He was at the next table a minute ago. | d. Really? It used to be on the back page.              |
| 5. In this newspaper, the TV guide is on the sent a page.            | e. I didn't know you were a composer.                   |
| 6. I picture book off the floor.                                     | f. Only if you promise never to do it again.            |
| 7. Will you ever for give me?  | g. They look like insects to me!                        |
| 8. This map shows all the citizen railways in the country.           | h. Oh thanks! I didn't realize I'd dropped it.          |
| 9. Spy does are not really insects you know.                         | i. Do you think so? I think they work together, myself. |
| 10. Coke and Pepsi arrival companies.                                | j. It doesn't show the smaller places then?             |

2. Complete the dialogues with the correct form of the verbs in the boxes:

deal get persuade talk find find get be speak take work apologize be see upset upset
---

- (a) A. We finally managed \_\_\_\_\_ him to \_\_\_\_\_ something about it.  
B. I imagine it was a relief for him \_\_\_\_\_ it off his chest.  
A. Yes, he couldn't go on \_\_\_\_\_ with it himself any longer.
- (b) A. The programme has enabled over ten individuals \_\_\_\_\_ full-time employment in the local area. And helped over twenty others \_\_\_\_\_ part-time work.  
B. That's great. And it's brilliant that so many local businesses were willing \_\_\_\_\_ involved.
- (c) A. My boss won't let me \_\_\_\_\_ any more time off work. I even offered \_\_\_\_\_ an extra half day to make up for it.

B. You'd expect him \_\_\_\_\_ a bit more understanding of your situation. Have you tried \_\_\_\_\_ to someone else? Is it worth \_\_\_\_\_ to someone above him?

(d) A. Well, I spoke to Patrick, but he failed \_\_\_\_\_ the funny side. He even wanted me \_\_\_\_\_ for \_\_\_\_\_ unprofessional. Can you believe I really didn't mean \_\_\_\_\_ him.

B. Oh, I wouldn't worry about \_\_\_\_\_ him. He's not got much of a sense of humour at the best of times.

3. Match the expressions (1-10) with the phrases (a-j):

- |                            |   |
|----------------------------|---|
| 1. achieve success         | a. an unknown factor in someone's success |
| 2. proven success          | b. the main reason for someone's success  |
| 3. overnight success       | c. success that comes suddenly            |
| 4. limited success         | d. some success, but not much             |
| 5. secret of one's success | e. success that is undisputed             |
| 6. key to one's success    | f. certain you will success               |
| 7. confident of success    | g frequency of success                    |
| 8. without success         | h. example of success                     |
| 9. success story           | i. unsuccessfully                         |
| 10. success rate           | j. be successful                          |

### Тема 7: Difference and Diversity.

1. Provide the missing derivatives to complete the word family:

Verb	Noun	Adjective
possess		possessive
persuade	persuasion	
assess		assessed
apply	application activity	active
inform	information society	social
experiment	experiment	
equal		equal
unite		united
	transfer	

2. Complete the gaps with a form of the underlined word in the first sentence:

- (a) We need to analyse the data.  
 Statistical \_\_\_\_\_ of the data provided some unexpected results.  
 You need good \_\_\_\_\_ skills for this kind of work.
- (b) The stomach produces acids, which help to digest food.  
 The new model should be in \_\_\_\_\_ in November.  
 If a factory does not become more \_\_\_\_\_, it faces closure.  
 The \_\_\_\_\_ was withdrawn from sale after a number of defects were identified.
- (c) Four alternative methods of payment are offered.  
 She takes a very \_\_\_\_\_ approach to her work.  
 They have been developing a new \_\_\_\_\_ for research in this area.
- (d) The president stated that economic development was the main priority.  
 The chancellor is concerned that the \_\_\_\_\_ is overheating.  
 She is studying \_\_\_\_\_ at Lancaster university.
- (e) Wages tend to be higher in the private sector.  
 This law is intended to protect people's \_\_\_\_\_.  
 The water services industry was \_\_\_\_\_ in the 1990s.
- (f) The heights of plants varied from 8 to 15 cm.  
 A wide \_\_\_\_\_ of fruit is grown on the island.  
 Regional \_\_\_\_\_ in the unemployment rate are significant.  
 A number of \_\_\_\_\_, such as wind speed and direction, humidity and air pressure, need to be considered.

(g) Both approaches yielded similar results.

There are many \_\_\_\_\_ between the two religions.

The firefighters resorted to industrial action to settle the dispute. \_\_\_\_\_ , railway workers are threatening to strike because of changes in working practices.

3. Match the phrase halves. The phrases can all be used to add contrastive ideas:

- |                   |                              |
|-------------------|------------------------------|
| 1. While this may | a. same time ...             |
| 2. At the         | b. said that ...             |
| 3. This is not    | c. be true up to a point ... |
| 4. Set against    | d. as it may ...             |
| 5. Be that        | e. to say that ...           |
| 6. Having         | f. this is ...               |

### Тема 8: Learning and Memory.

1. Conditional sentences. Complete the text with the correct form of the verbs in the box.

be (x2)	not/carry out
have (x2)	leave
may/subject	enter
wish	record

If you (1) *are* a parent or guardian, you (2) \_\_\_\_\_ a responsibility to ensure that your child receives school education for the years in which it is compulsory. Should you, without good reason, (3) \_\_\_\_\_ this duty, there (4) \_\_\_\_\_ a number of measures that can be taken to make sure that they are carried out. A child must stay on the school register until they are legally allowed to leave school. If a child were for any reason (5) \_\_\_\_\_ school before that date, this (6) \_\_\_\_\_ as taking unauthorized absence and (7) \_\_\_\_\_ to legal action. Even though the school-leaving age is 16, a young person must by law continue education or training until their 18th birthday. This means that if a child (8) \_\_\_\_\_ to leave school at the age of 16, he or she (9) \_\_\_\_\_ a choice of either undertaking work-based learning, such as an apprenticeship, or undertaking part-time education or training if they (10) \_\_\_\_\_ employment.

2. Complete the sentences with the words or phrases in the box.

assuming	In the event that
unless	otherwise
but for	whether or not

- (a) \_\_\_\_\_ you get accepted on the course will depend as much on the interview as on your exam results.
- (b) \_\_\_\_\_ we get enough participants, the course will run in the second week of July.
- (c) We'd better get a move on, \_\_\_\_\_ we will be late.
- (d) \_\_\_\_\_ one or two areas where you could have gone into a bit more depth, this is a very good essay. Well done.
- (e) \_\_\_\_\_ the course is cancelled, you will receive a full refund.
- (f) You can't normally teach at a university \_\_\_\_\_ you have at least a master's degree.

3. Complete the extracts with the correct preposition.

- (a) \_\_\_\_\_ arriving at the conference, please go to the welcome desk to collect your badge.

- (b) \_\_\_\_\_ waiting for over one hour, we still hadn't received our food. Only \_\_\_\_\_ threatening to leave the restaurant did we attract attention of your staff.
- (c) \_\_\_\_\_ interest rates being as low as they are at the moment, this may be a good time to take out a loan.
- (d) We are beginning to make steady progress and \_\_\_\_\_ spending more on resources, we are confident of making further progress.
- (e) The miscalculations have been costly and \_\_\_\_\_ wishing to apportion blame, there has clearly been an element of human error in the process.
- (f) \_\_\_\_\_ accepting your kind invitation to speak at the conference, I have a few questions.

### **Tema 9: Work and Equality.**

1. Passive voice. Complete the sentences with the correct passive form of the verb in brackets.

- (a) It is difficult for Barton plc to do any forward planning, because the company \_\_\_\_\_ (restructure) at the moment.
- (b) A pop festival \_\_\_\_\_ (plan) to raise money for charity when the Backers suddenly withdrew their funding.
- (c) By April next year, the wasteland next to the army base \_\_\_\_\_ (occupy) by protestors for five years.
- (d) The prisoners \_\_\_\_\_ (release) by the time the negotiators arrived to begin talks.
- (e) When a commercial sponsor can be found, the project \_\_\_\_\_ (carry out).
- (f) Most scientists accept that the climate change that \_\_\_\_\_ (observe) in the last forty years is due at least in part to human activity.

2. Fill the gaps with the correct auxiliary or modal verb to avoid repetition.

- (a) – Do you think Joanna will have paid off her debts yet?  
– She \_\_\_\_\_, but I doubt it. You know what she's like with money.
- (b) – I drove past your house last night, about nine o'clock. I was thinking of popping in.  
– You \_\_\_\_\_. I wasn't doing anything.
- (c) I hope you get the job. If you \_\_\_\_\_, just think how much money you'll earn.
- (d) – John has phoned you this morning.  
– Don't pull my leg. He \_\_\_\_\_. He doesn't know my phone number.

- (e) I thought I'd seen the film before but I \_\_\_\_\_, so I enjoyed it a lot.  
(f) – I'm thinking of investing all my money in a record shop.  
– I \_\_\_\_\_. It sounds very risky to me.

3. Understanding figures and tables. Match the words with their definitions.

trend   axis   mean   mode   median   legend
--

- (a) the value found by adding together all the numbers in a group, and dividing the total by the number of numbers  
(b) the value that appears most frequently in a series of numbers  
(c) a general direction in which a situation is changing or developing  
(d) having a value in the middle of a series of values  
(e) the explanation of a map or a diagram in a book  
(f) a fixed line against which the positions of points are measured, especially points on a graph



---

## Макроэкономика 1

---

### Задания для промежуточной аттестации

*Примеры задач.*

1. *Операции на открытом рынке.*

Покажите аналитически и с помощью графиков, какой эффект оказывает на процентную ставку сдерживающие операции на открытом рынке.

2. *Равновесие на денежном рынке.*

У типичного представителя экономики функция спроса на деньги принимает вид:  $M^d = PY(0.5 - i)$ , где  $M^d$  - спрос на деньги,  $Y$  - реальный доход,  $P$  - цена единицы выпуска, и  $i$  - процентная ставка (ставка, равная пяти процентам, записывается как  $i = 0.05$ ).

(a) Какова величина спроса на деньги, если  $P = 5$ ,  $Y = 10000$ , и  $i = 0.05$ ?

(b) Какова равновесная процентная ставка, если  $M^s = 25000$ ,  $P = 5$  и  $Y = 10000$ .

(c) Рынок находится в равновесии, описанном в пункте (b). Центральный банк проводит операцию на открытом рынке, после которой спрос на деньги падает на 10 процентов. Что произойдет с процентной ставкой? Опишите словами, как происходит процесс установления нового равновесия в экономике.

(d) Рынок находится в равновесии, описанном в пункте (b). Рецессия сокращает объем выпуска на 10 процентов. Что произойдет с процентной ставкой? Опишите словами, как происходит процесс установления нового равновесия в экономике.

3. *Истинные, ложные и неопределенные утверждения.*

Определите и объясните, являются ли следующие утверждения истинными, ложными или частично истинными. Если утверждение ложно, приведите контрпример.

(a) Если ИПЦ в России составляет 150, а в США - 85, то в России наблюдается инфляция, а в США - дефляция.

(b) Согласно модели Солоу, чем выше норма сбережений, тем выше производительность труда в стационарном состоянии.

(c) Если валовой внутренний продукт (ВВП) экономики ниже, чем валовой национальный продукт (ВНП), то сальдо торгового баланса положительное.

- (d) Производственная функция  $F(K, L) = \sqrt{K} + \sqrt{L}$  описывает технологию с постоянной отдачей от масштаба и убывающей отдачей от труда.
- (e) Согласно теории паритета покупательной способности, номинальная девальвация местной валюты приведет к снижению реального обменного курса.
- (f) Уровень безработицы определяется как процент взрослого населения, которое не работает.
- (g) У ожидаемой инфляции нет издержек.
- (h) Любая производственная функция с постоянной отдачей от масштаба подразумевает постоянную долю трудового дохода в структуре общего дохода.

#### 4. ВВП и индексы цен.

Рассматривается экономика с тремя видами готовой продукции: хлеб, яблоки и компьютеры. Цены на товары и объемы продаж за 2015 и 2016 годы приведены в таблице.

	2015		2016	
	P	Q	P	Q
хлеб	\$1	5000	\$1.2	6000
яблоки	\$0.9	3000	\$0.8	4000
компьютеры	\$300	5	\$400	6

- (a) Известно, что все три блага произведены и потреблены внутри страны. Посчитайте номинальный и реальный ВВП, используя 2015 год как базовый для обоих периодов. Приведите темпы роста номинального и реального ВВП в 2016.
- (b) Посчитайте дефлятор ВВП в 2016, используя 2015 год в качестве базового. Чему равен темп инфляции в 2016, найденный с помощью дефлятора ВВП?
- (c) Посчитайте индекс потребительских цен (ИПЦ) в 2016, используя 2015 год в качестве базового. Чему равен темп инфляции в 2016, найденный с помощью ИПЦ?
- (d) Как изменятся ответы на (b) и (c), если компьютеры - импортируемый товар и не производится внутри страны?
- (e) Как изменятся ответы на (b) и (c), если компьютеры - экспортируемый товар и не потребляется внутри страны?
5. Мобильность факторов производства и долгосрочное равновесие на рынке факторов производства.

Экономика состоит из двух регионов: Север и Юг. В обоих регионах производство описывается с помощью функции Кобба-Дугласа:  $Y = \sqrt{KL}$ , где  $L$  и  $K$  - труд и капитал, соответственно. Предложение факторов производства

фиксировано:  $K^N = 16$  и  $L^N = 25$  на Севере и  $K^S = 9$  и  $L^S = 25$  на Юге (Север - регион с избытком капитала).

Сначала предположим, что два региона изолированы друг от друга, и факторы не могут перемещаться между ними.

- (a) Посчитайте объем выпускаемой продукции в каждом регионе и объем глобального производства. У какого региона производительность труда (выпуск продукции на одного работника) наибольшая? Объясните свой ответ.
- (b) Выведите функции спроса на труд и капитал для обоих регионов.
- (c) Посчитайте равновесные цены и объемы производства в обоих регионах. Покажите на графиках равновесия на рынках факторов производства. В каком регионе наибольшая реальная заработная плата (доход работников)? Реальная отдача от капитала (доход собственников капитала)? Объясните свой ответ.

Теперь положим, что капитал также не мобилен, но труд может свободно перемещаться между регионами. Возможность трудовой миграции приравнивает реальные заработные платы в обоих регионах.

- (d) Посчитайте равновесные цены и объем факторов производства в обоих регионах. Увеличилась ли реальная заработная плата в регионах в сравнении с ситуацией, когда труд был иммобилен? Объясните свой ответ. Покажите на графиках новые равновесия на рынках факторов производства. Объясните полученные результаты.
- (e) Посчитайте объем выпускаемой продукции в каждом регионе и объем глобального производства. Сравните производительность труда в регионах для случаев мобильного и иммобильного труда.

#### 6. Деньги и денежно-кредитная политика.

В экономике общий объем резервов  $TR$  составляет 1000, наличных денег в обращении  $CC$  - 2000, депозитов  $DD$  - 10000. Норма обязательных резервов  $rr$  равна 5%.

- (a) Посчитайте коэффициент денежного мультипликатора,  $m$ . Объясните вкратце, что он означает? (Можно привести пример того, как он работает.)
- (b) Чему равно значение денежной базы и предложения денег? Можно ли утверждать, что в экономике резервы избыточны?
- (c) Темп инфляции увеличился, и Центральный банк (ЦБ) намеревается вернуть ее на прежний уровень сократив предложение денег на 2000. Какую операцию на открытом рынке должен ЦБ предпринять, чтобы достигнуть желаемого? В каком объеме? Посчитайте и объясните свой ответ.

- (d) В результате финансового кризиса депозиты упали до 6000, а объем наличных денег увеличился до 4000. Как изменился показатель денежного мультипликатора и предложение денег? Какие меры ЦБ должен предпринять, чтобы предложение денег осталось неизменным?

7. *Модель Солоу с производственными государственными расходами.*

Производственная функция задана как  $Y = F(K, G, L) = K^\alpha G^\beta L^{1-\alpha-\beta}$ , где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  и  $\alpha + \beta < 1$ . Государственные расходы  $G$  можно интерпретировать как уровень инфраструктуры или другие производственные услуги. Ограничение на объем ресурсов:

$$C_t + G_t + I_t = Y_t = F(K_t, G_t, L_t)$$

Государственные расходы финансируются с помощью пропорционального налога на доход  $\tau$ . Личное потребление и инвестиции - доли  $1 - s$  и  $s$  от располагаемого дохода домохозяйств:

$$G_t = \tau Y_t, \quad C_t = (1 - s)(Y_t - G_t), \quad I_t = s(Y_t - G_t)$$

Население постоянно:  $L_t$  - константа. Темп износа капитала равен  $\delta$ .

- (a) Для стационарного состояния найдите уровень капиталовооруженности труда (капитал, приходящийся на одного работника), выраженный через норму сбережений,  $s$ , темп износа,  $\delta$ , и ставку подоходного налога,  $\tau$ .
- (b) Для стационарного состояния найдите функцию производительности труда (выпуска продукции, приходящегося на одного работника) и функцию потребления на одного работника, выраженные через  $s$ ,  $\delta$  и  $\tau$ .
- (c) Найдите ставку подоходного налога  $\tau$ , такую, что дает наибольший уровень капиталовооруженности в стационарном состоянии. Дайте интерпретацию полученному результату. Какая ставка налога оптимальна в случае, когда государственные расходы не влияют на производство, то есть  $\beta = 0$ .
- (d) Найдите норму сбережений, максимизирующую удельное потребление. Объясните, как можно достичь Золотого правила накопления.

8. *Максимизация реального сеньоража.*

В экономике функция реального спроса на деньги принимает вид:  $L(Y, i) = 0.4Y - 2000i$ , где  $Y$  - реальный доход и  $i$  - номинальная ставка процента. В равновесии реальный спрос на деньги  $L$  равен реальному предложению денег  $M/P$ . Известно, что  $Y = 1000$ , а реальная ставка процента равна 0.01. Государство использует сеньораж для покрытия дефицита бюджета. Цены корректируются только после получения государством дохода от сеньоража.

- 
- (a) Реальный сеньораж в данной экономике - это увеличение номинального предложения денег, деленное на уровень цен  $P$  (последнее не изменяется мгновенно с изменением  $M$ ), то есть  $\frac{M_{t+1} - M_t}{P_t}$ . Выведите формулу реального сеньоража, которая зависит от темпов роста предложения денег и реального спроса на деньги.
- (b) Покажите, что в стационарном состоянии темп роста предложения денег равен уровню инфляции.
- (c) Выведите формулу реального сеньоража, которая зависит от стационарного уровня инфляции.
- (d) Найдите максимальное количество реального дохода от сеньоража и соответствующий уровень инфляции. Объясните полученный результат.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1.

Общий вес: 100 баллов.

1. (20 баллов) *Истинные, ложные и неопределенные утверждения.*

Определите и объясните, являются ли следующие утверждения истинными, ложными или частично истинными. Оценка зависит от качества приведенной аргументации. Если утверждение ложно, дайте контрпример.

- (a) (4 балла) В августе 2017, Ураган “Харви” в Хьюстоне уничтожил миллионы автомобилей общей стоимостью более \$3 млрд. В результате, ВВП штата Техас снизилось на \$3 млрд в 2017.
- (b) (4 балла) Если ИПЦ в России составляет 150, а в США - 85, то в России наблюдается инфляция, а в США - дефляция.
- (c) (4 балла) В декабре 2016, англо-швейцарская трейдинговая компания Glencore и Катарский инвестиционный фонд закрыли сделку по покупке 19,5% акций “Роснефти” на общую сумму \$11.3 млрд. Эта операция отразилась на показателе ВВП России 2016 года как рост экспорта.
- (d) (4 балла) Уровень безработицы определяется как процент взрослого населения, который не работает.
- (e) (4 балла) Более высокий показатель ВВП всегда означает более высокий уровень общественного благосостояния.

2. (20 баллов) *ИПЦ и его компоненты.*

Перейдите на сайт Федеральной службы государственной статистики<sup>1</sup> и найдите данные по индексу потребительских цен. На сколько индекс вырос (включая все компоненты) с начала 2017 года? Для каких товаров цены выросли больше всего? меньше всего? Есть ли в корзине товары, цены на которые снизились? Как вы можете объяснить выявленную динамику?

3. (20 баллов) *Взвешенный цепной реальный ВВП.*

В 1996 году Бюро экономического анализа США (The Bureau of Economic Analysis) перешло на взвешенный цепной метод расчета экономического роста. Чтобы понять разницу между индексами с постоянными (с базисным годом) и цепными весами, рассмотрим экономику, состоящую из двух товаров - яблок и апельсинов. Таблица ниже показывает цены и объемы потребления товаров с 1992 по 1996. За этот период цена на яблоки постоянно растет, когда апельсины только дешевели, потребление апельсинов относительно яблок растет.

---

<sup>1</sup>www.gks.ru

Год	Яблоки		Апельсины	
	Количество	Цена	Количество	Цена
1992	100	\$0.25	50	\$0.50
1993	102	\$0.28	55	\$0.48
1994	103	\$0.32	60	\$0.45
1995	104	\$0.34	65	\$0.44
1996	105	\$0.36	70	\$0.42

- (a) (10 баллов) Для метода с постоянными весами, темп прироста (в процентах) реального ВВП за год  $t$  по отношению к предыдущему году  $t-1$  находится из формулы:

$$\frac{P_B^A Q_t^A + P_B^O Q_t^O}{P_B^A Q_{t-1}^A + P_B^O Q_{t-1}^O} - 1 \times 100,$$

где верхний индекс  $A$  обозначает апельсины,  $O$  - яблоки, а нижний индекс  $B$  - базисный год. Посчитайте и сделайте таблицу с ежегодными темпами прироста ВВП для 1993-1996 гг., используя в качестве базисного 1992-1996 гг. Обратите внимание, что чем дальше рассчитываемый показатель от базисного года, тем больше разница в темпах прироста.

- (b) (10 баллов) Для метода с цепными весами, темп прироста (в процентах) реального ВВП за год  $t$  по отношению к предыдущему году  $t-1$  находится из формулы:

$$\frac{\frac{P_{t-1}^A Q_t^A + P_{t-1}^O Q_t^O}{P_{t-1}^A Q_{t-1}^A + P_{t-1}^O Q_{t-1}^O} \times \frac{P_t^A Q_t^A + P_t^O Q_t^O}{P_t^A Q_{t-1}^A + P_t^O Q_{t-1}^O}}{1} - 1 \times 100.$$

Полученный темп прироста - геометрическое среднее темпов прироста для годов  $t-1$  и  $t$ . Просчитайте и сделайте таблицу с ежегодными темпами прироста с цепными весами для 1993-1996 гг. Сравните результат с пунктом (a).

#### 4. (20 баллов) Рынки труда и капитала.

Экономика описывается производственной функцией Кобба-Дугласа:  $Y = AK^{0.3}L^{0.7}$ .

- (a) (5 баллов) Какие доли дохода получают капитал и труд?
- (b) (5 баллов) Допустим, иммиграция увеличила рабочую силу на 10%. Что произойдет с общим выпуском (в процентах)? арендной ценой капитала? реальной заработной платой?
- (c) (5 баллов) Допустим, зарубежные вливания в экономику увеличили запасы капитала на 10%. Что произойдет с общим выпуском (в процентах)? арендной ценой капитала? реальной заработной платой?
- (d) (5 баллов) Допустим, благодаря научно-техническим достижениям, значение параметра  $A$  увеличилось на 10%. Что произойдет с общим выпуском (в процентах)? арендной ценой капитала? реальной заработной платой?

## 5. (20 баллов) Производственная функция.

В производстве используется два фактора: капитал ( $K$ ) и труд ( $L$ ).  $A$  - технологический параметр (константа). Ответьте на следующие вопросы:

(a) (10 баллов) Можно ли охарактеризовать следующие производственные функции постоянной отдачей от масштаба? Вкратце обоснуйте свой ответ.

i.  $Y = AK^{0.4}L^{0.5}$

ii.  $Y = \left( K^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + L^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$

iii.  $Y = \min\{K, L\}$

(b) (10 баллов) Допустим, производственная функция задана как  $Y = C + K^\alpha L^\beta$ , где  $C$  - константа. Влияет ли увеличение  $C$  на предельный продукт одного из факторов? на производительность труда?



## Домашнее задание 2.

Общий вес: 100 баллов.

### 1. (20 баллов) Истинные, ложные и неопределенные утверждения.

Определите и объясните, являются ли следующие утверждения истинными, ложными или частично истинными. Оценка зависит от качества приведенной аргументации. Если утверждение ложно, дайте контрпример.

- (a) (5 баллов) Предельный продукт труда всегда возрастает по капиталу.
- (b) (5 баллов) Реальная ставка процента не может быть отрицательной в долгосрочном периоде.
- (c) (5 баллов) Товарные деньги приносят больше полезности обществу, чем бумажные деньги, т.к. у них есть внутренняя стоимость.
- (d) (5 баллов) Центральный банк может увеличить предложение денег покупая ипотечные ценные бумаги (mortgage-backed securities).

### 2. (20 баллов) Рынок заемных средств.

Используйте модель рынка заемных средств для закрытой экономики для прогнозирования влияния каждого из нижеперечисленных событий на реальную ставку процента, инвестиции, выпуск, потребление и государственные и частные сбережения. Для ответа используйте графики.

- (a) (5 баллов) Население страны стареет.
- (b) (5 баллов) Рост цен на нефть перераспределяет доходы от стран-импортеров нефти (имеющим низкую склонность к накоплению) к странам-экспортерам нефти (имеющим высокую склонность к накоплению). Что произойдет с *мировыми* ставкой процента, инвестициями, выпуском, потреблением и сбережениями?
- (c) (5 баллов) Технология добычи сланцевой нефти улучшилась.
- (d) (5 баллов) Высокая инфляция увеличила вдвое цены на все факторы и выпуск в экономике.

### 3. (20 баллов) Деньги и их функции.

Каковы три функции денег? Какие функции могут выполнять три ниже перечисленных предмета? Какие не могут?

- (a) (4 балла) Предмет искусства.
- (b) (4 балла) Дорожный чек.
- (c) (4 балла) Эфириум (Ethereum).
- (d) (4 балла) Акции Роснефти.
- (e) (4 балла) Блокчейн.

## 4. (20 баллов) Бухгалтерский баланс.

Используйте предоставленную ниже информацию для составления баланса Коммерческих Банков и ЦБ.

<i>GS</i>	Государственные ценные бумаги, выпущенные ЦБ	?
<i>DL</i>	Дисконтные займы	\$0
<i>CC</i>	Наличные деньги в обращении	\$10000
<i>RR</i>	Обязательные резервы	?
<i>ER</i>	Избыточные резервы	?
<i>TR</i>	Общие резервы (= $RR + ER$ )	?
<i>r</i>	Норма резервирования депозитов	10%
<i>LL</i>	Займы	\$50000
<i>SC</i>	Ценные бумаги, выпущенные Коммерческими Банками	\$40000
<i>DD</i>	Депозиты	\$100000
<i>DB</i>	Долг Коммерческих Банков	\$0
<i>NW</i>	Чистая стоимость Коммерческих Банков	\$10000

- (a) (10 баллов) Составьте баланс для Коммерческих банков и ЦБ.
- (b) (5 баллов) Посчитайте денежную базу, предложение денег и денежный мультипликатор.
- (c) (5 баллов) ЦБ продает Коммерческим Банкам государственные облигации стоимостью \$20000. Как изменится баланс Коммерческих Банков? Какое влияние операция оказывает на денежно-кредитную политику и предложение денег? Как изменится денежная база и денежный мультипликатор?

## 5. (20 баллов) Денежно-кредитная политика в США и России.

Зайдите на сайт Совета управляющих Федеральной резервной системы (The Board of Governors of the Federal Reserve System) и ознакомьтесь с последним пресс-релизом кредитно-денежной политики Федерального комитета открытого рынка (Federal Open Market Committee).

- (a) (5 баллов) Какое текущее положение кредитно-денежной политики? (Обратите внимание, что политика разъясняется через повышение или понижение ставки по федеральным фондам (Federal funds rate), а не через увеличение или уменьшение предложения денег.) Если бы вы могли использовать только одно предложение из документа в качестве аргументации, то какое вы бы использовали? Объясните ваш ответ. Какое значение текущей ставки рефинансирования? Чему ЦБ отдает больший приоритет - уровню инфляции или уровню безработицы?
- (b) (5 баллов) Есть ли возможность у ФРС (Федеральной резервной системы) напрямую влиять на ставку по федеральным фондам? Кратко и ясно аргументируйте свой ответ. Как изменения ставки влияют на предложение денег?

Теперь зайдите на сайт Центрального банка РФ (Банка России) и ознакомьтесь с последним пресс-релизом кредитно-денежной политики.

- (a) (5 баллов) Какое текущее положение кредитно-денежной политики в России? Какое значение ключевой ставки? Чему ЦБ отдает больший приоритет - уровню инфляции или уровню безработицы?
- (b) (5 баллов) 17 декабря 2014 года Банк России поднял ключевую ставку с 10,5% до 17%. Как это отразилось на предложении денег в стране? Что послужило причиной изменения ставки?

### Домашнее задание 3.

Общий вес: 100 баллов.

1. (20 баллов) *Истинные, ложные и неопределенные утверждения.*

Определите и объясните, являются ли следующие утверждения истинными, ложными или частично истинными. Оценка зависит от качества приведенной аргументации. Если утверждение ложно, дайте контрпример.

- (a) (5 баллов) Волатильность денег положительно зависит от номинальной ставки процента.
- (b) (5 баллов) Страна с дефицитом бюджета всегда имеет дефицит торгового баланса.
- (c) (5 баллов) Если валовой внутренний продукт (ВВП) экономики ниже, чем валовой национальный продукт (ВНП), то сальдо торгового баланса положительное.
- (d) (5 баллов) Если номинальный обменный курс рубля к доллару снизится на 5%, когда цены в России увеличатся на 8%, а цены в США упадут на 1%, то реальный обменный курс рубля упадет на 4%.

2. (20 баллов) *Сеньораж как инфляционный налог.*

Обозначим предложение денег сегодня как  $M_t$ , а уровень цен сегодня как  $P_t$ . Государство решает напечатать дополнительные деньги,  $\Delta M_{t+1} = M_{t+1} - M_t$ , и использовать их для покупки товаров. Из-за новых наличных денег в обращении в экономике уровень цен поднялся до  $P_{t+1} = P_t + \Delta P_{t+1}$ . Ценность приобретенных государством товаров рассчитывается как

$$\frac{M_{t+1} - M_t}{P_{t+1}} = \frac{\Delta M_{t+1}}{P_t + \Delta P_{t+1}}$$

Инфляционный налог - это разница между новым и старым значением реальных запасов денежных средств:

$$\frac{M_t}{P_t} - \frac{M_t}{P_{t+1}} = \frac{M_t}{P_t + \Delta P_{t+1}} \cdot \frac{\Delta P_{t+1}}{P_t}$$

- (a) (10 баллов) Используя количественную теорию денег покажите равенство между сеньоражем и инфляционным налогом в долгосрочном периоде для экономики с постоянным уровнем выпуска.
- (b) (10 баллов) Посчитайте сеньораж и инфляционный налог в долгосрочном периоде для растущей экономики с постоянным предложением денег. Как вы можете интерпретировать полученные результаты?

3. (20 баллов) *Платежный баланс в Мире Льда и Пламени.*

Рассмотрим два королевства в мире Льда и Пламени - Север и Дорн. Объясните, как следующие операции повлияют на счета платежных балансов Севера и Дорна:

- (a) (2 балла) Север продают Дорну меха общей стоимостью 10000 золотых драконов (монет).
- (b) (2 балла) Инвесторы Дорна получают 2000 драконов как дивиденды от владения акций овцеводческой фермы на Сереве.
- (c) (2 балла) Дорн продает фрукты Северу на сумму 20000 драконов.
- (d) (2 балла) Принц Дорна и его эскорт тратят 500 драконов на еду, вино и жилье во время визита на Север.
- (e) (2 балла) Дорн предоставляет фрукты на 500 драконов беженцам из Зачарованного Леса, расположенных на Севере.
- (f) (2 балла) Фермеры Севера занимают 7000 драконов у Железного Банка Браавоса.
- (g) (2 балла) Принц Дорна покупает акции Железного Банка Браавоса стоимостью 6000 драконов.
- (h) (2 балла) Фермеры семенных плантаций Дорна платят работникам из Севера 3000 драконов за труд.
- (i) (2 балла) Дорн прощает долг Севера размером 1000 драконов.
- (j) (2 балла) Утес Кастерли занимает 40000 драконов у Железного Банка Браавоса для финансирования войны с Севером.

4. (20 баллов) *Сбережения и чистый экспорт.*

Рассматривается закрытая экономика, где потребление отрицательно зависит от реальной ставки процента:

$$C = c_0 + c_1 \frac{1+r}{r} (Y - T), \text{ где } c_0 \text{ и } c_1 \text{ - константы.}$$

- (a) (3 балла) Вкратце объясните почему потребление может отрицательно зависеть от ставки процента.
- (b) (3 балла) Находясь в данных условиях, мы можем рассмотреть следующую функциональную форму для личных сбережений:

$$S_p = s_0 + s_1(r)(Y - T)$$

Выведите выражения для  $s_0$  и  $s_1$  через  $c_0$ ,  $c_1$  и  $r$ .

- (c) (6 баллов) Пусть  $c_0 = 12$ ,  $c_1 = 0.1$ ,  $Y = 100$ ,  $T = 20$  и  $G = 10$ , а спрос на инвестиции задан как

$$I = 20 + \frac{2}{r}$$

Найдите равновесный уровень ставки процента. С помощью графика покажите равновесие на рынке заемных средств.

- (d) (8 баллов) Теперь рассмотрим случай малой открытой экономики. Мировая ставка процента равна 12%. Чему равен чистый экспорт? Что мы можем наблюдать - дефицит, профицит или равновесие торгового баланса? Покажите на графике зависимость чистого экспорта от мировой ставки процента.

5. (20 баллов) *Долгосрочное равновесие в малой открытой экономике.*

Используйте модель малой открытой экономики для прогнозирования изменений торгового баланса, реального и номинального обменного курса при наступлении следующих событий:

- (a) (4 балла) Население страны стареет.
- (b) (4 балла) Налоговая реформа сделала привлекательным для бизнеса постройку новых заводов.
- (c) (4 балла) Российские санкции, запрещающие ввоз продуктов питания из Европы, снизили импорт из ЕС и увеличили потребление отечественной продукции.
- (d) (4 балла) Центральный банк удвоил предложение денег.
- (e) (4 балла) Спад цен на нефть сократил стоимость российского экспорта.

## Домашнее задание 4.

Общий вес: 100 баллов.

1. (20 баллов) *Истинные, ложные и неопределенные утверждения.*

Определите и объясните, являются ли следующие утверждения истинными, ложными или частично истинными. Оценка зависит от качества приведенной аргументации. Если утверждение ложно, дайте контрпример.

- (a) (5 баллов) Чем выше норма сбережений, тем выше потребление в стационарном состоянии.
- (b) (5 баллов) В долгосрочном периоде рост населения не влияет на уровень выпуска продукции.
- (c) (5 баллов) В модели Солоу инвестиции всегда равны нулю в стационарном состоянии.
- (d) (5 баллов) Образование увеличивает уровень человеческого капитала и, таким образом, выпуск. Из этого следует, что государство должно субсидировать образование.

2. (40 баллов) *Модель Солоу.*

Производственная функция экономики принимает вид

$$Y = \left( \alpha^{\frac{1}{\sigma}} K^{1-\frac{1}{\sigma}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{\sigma}} L^{1-\frac{1}{\sigma}} \right)^{1-\frac{\sigma}{\sigma}}, \text{ где } \alpha = 1/3 \text{ и } \sigma = 1/2.$$

Уровень населения, доля рабочей силы в общей численности взрослого населения и уровень безработицы постоянны.

- (a) (5 баллов) Найдите устойчивый запас капитала через норму сбережений,  $s$ , и темп износа капитала,  $\delta$ .
- (b) (5 баллов) Выведите уравнение для устойчивого уровня производительности труда и устойчивого объема потребления на одного работника через  $s$  и  $\delta$ .
- (c) (5 баллов) Пусть  $\delta = 0.1$  и  $s = 0.3$ . Найдите устойчивые уровни производительности труда, капиталовооруженности и потребления на одного работника.
- (d) (5 баллов) Допустим, норма сбережений снизилась до  $s = 0.2$ . Найдите устойчивые уровни производительности труда, капиталовооруженности и потребления на одного работника.
- (e) (5 баллов) Объясните что произойдет с производительностью труда и ростом производительности, когда норма сбережений упадет с  $s_0 = 0.3$  до  $s_1 = 0.2$ .

- (f) (5 баллов) Используйте любое программное обеспечение для работы со сводными таблицами и посчитайте устойчивые уровни выпуска и потребления на одного работника для  $s = 0.3$ ,  $s = 0.295$ ,  $s = 0.29$ ,  $s = 0.285$ , ... ,  $s = 0.2$ . Объясните интуицию полученных результатов. Покажите графически переход от  $s_0$  к  $s_1$ . [Подсказка: нарисуйте на графике устойчивые уровни производительности труда и потребления на одного работника как функцию, зависящую от нормы сбережений (т.е. отложите норму сбережений по горизонтальной оси и соответствующие уровни выпуска на работника и потребления на работника на вертикальной оси).]
- (g) (5 баллов) Найдите норму сбережений, максимизирующую потребление на одного работника.
- (h) (5 баллов) При  $s = 0.2$  потребление в экономике будет выше или ниже уровня Золотого Правила?

3. (20 баллов) Факторы уровня жизни.

Объясните как факторы (а)-(е) оказывают влияние на устойчивый уровень выпуска на одного работника. Для каждого случая покажите, через какие элементы модели реализуются эффекты - через  $A$ ,  $K$ ,  $H$  или какую-либо возможную их комбинацию.  $A$  - уровень технологического прогресса,  $K$  - капитал,  $H$  - человеческий капитал.

- (a) (4 балла) Географическое расположение.
- (b) (4 балла) Образование.
- (c) (4 балла) Защита прав на частную собственность.
- (d) (4 балла) Открытость торговли.
- (e) (4 балла) Развитая социальная инфраструктура.

4. (20 баллов) Траектория сбалансированного роста: международные различия.

Большую часть международных различий в продуктивности можно объяснить международными различиями в эффективности. Пусть следующие экономики можно описать моделью Солоу с технологическим прогрессом и ростом населения:

	$y(\dot{n})/y(US)$	$s(\dot{n})$	$n(\dot{n})$	$A(\dot{n})/A(US)$
США	1	0.204	0.0096	1
Канада	0.864	0.246	0.0122	0.972
Аргентина	0.453	0.144	0.0141	0.517
Таиланд	0.233	0.213	0.0153	0.468
Камерун	0.048	0.102	0.028	0.264



Первый столбец показывает ВВП на душу населения страны по отношению к подушевому ВВП США 1997 года (данные взяты из Penn World Tables). Допустим, что темп прироста технологического прогресса  $g_A$  и норма износа капитала  $\delta$  дают в сумме 0.075.  $y(i)/y(US)$  показывает эффективность страны  $i$  по отношению к США. Пусть производственная функция имеет вид  $Y = K^\alpha(AL)^{1-\alpha}$ , где  $\alpha = 0.3$ . Выведите выражение для траектории сбалансированного роста подушевого дохода как функцию от нормы сбережений, темпа прироста населения и уровня технологического прогресса. Используйте значения из таблицы, чтобы найти подушевой доход в долгосрочном периоде по отношению к США для двух возможных сценариев:

- (a) (10 баллов) Уровень технологического развития стран относительно США остается неизменным.
- (b) (10 баллов) Все страны в долгосрочном периоде достигают такого же уровня технологического развития, как и США.

## Макроэкономика 2

### Задания для промежуточной аттестации

- Экзамен длится 2 часа, справочные материалы запрещены. Телефоном пользоваться нельзя.
- Исходите из стандартных предположений, сделанных во время курса, если не заявляется иное.
- Если уместно, приводите графическое и аналитическое обоснования.
- Если требуется графическое обоснование модели IS-LM, используйте координатную систему  $(i, Q)$ .
- Будьте кратким и точным. Вы потеряете баллы за избыточный анализ.

Общий вес работы: 100 баллов.

1. (25 баллов) *Совокупное предложение.*

- (15 баллов) Задайте, выведите и опишите краткосрочную кривую (функцию) совокупного предложения с положительным наклоном (upward slopping). Используйте производственную функцию, введенную на занятиях.
- (7 баллов) Что влияет на эластичность данной кривой? Объясните.
- (3 балла) Когда эластичность кривой стремится к бесконечности? От чего это зависит? Свой ответ обоснуйте.

2. (20 баллов) *Совокупный спрос.*

- (10 баллов) Почему кривая совокупного спроса имеет отрицательный наклон (negative slope) в случае малой открытой экономики с плавающим обменным курсом? Объясните.
- (10 баллов) Что происходит с номинальным обменным курсом при движении вдоль кривой совокупного спроса к более высоким ценам? Объясните.

3. (30 баллов) *Малая открытая экономика с фиксированным обменным курсом.*

Рассмотрим малую открытую экономику с фиксированным обменным курсом и абсолютной мобильностью капитала. Кривая совокупного предложения имеет стандартный кейнсианский вид. В начальном состоянии экономика находится в долгосрочном равновесии. Государство решает увеличить расходы, оставляя бюджет сбалансированным (balanced budget expansion). Проанализируйте изменения в источниках дохода ( $Y$ ) и расходах ( $C, G, I, NX$ ). Сравните:

- (a) краткосрочную ситуацию, когда уровень цен еще не изменился, и начальное состояние;
- (b) краткосрочную ситуацию, когда уровень цен изменился, и начальное состояние;
- (c) новое долгосрочное равновесие и начальное состояние.

Сравните величину изменений в этих случаях. Уточните, как эти изменения влияют на цены, номинальную и реальную зарплаты, реальный обменный курс, резервы иностранной валюты Центрального банка и внешний долг страны.

4. (25 баллов) *Инфляционный налог и сеньораж.*

Рассмотрим малую открытую экономику с плавающим обменным курсом и абсолютной мобильностью капитала. В экономике наблюдается инфляция, связанная с дефицитом бюджета, который финансируется денежной эмиссией. В 2010 г. государство навсегда увеличило дефицит бюджета и с этого момента держит его величину постоянной. Предположим, что стационарное состояние всегда существует.

- (a) (10 баллов) Как данная политика повлияет на инфляционное стационарное состояние и уровень инфляции? Что случится со спросом на деньги? Опишите экономические силы, которые обуславливают сходимость (convergence) к стационарному состоянию.
- (b) (15 баллов) Предположим, что спрос на деньги имеет вид  $L(Y, i) = Y \times G(i)$ , где  $G$  убывает по  $i$ . Кроме того, предположим, что выпуск растет постоянными темпами.
  - i. Требуется ли изменение уровня инфляции для увеличения бюджетного дефицита? Приведите экономическую интуицию.
  - ii. Чему равно годовое изменение дефицита, не влекущее за собой изменение уровня инфляции? Приведите вычисления.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1.

Общий вес работы: 100 баллов.

1. (35 баллов) *Фильтр Ходрика-Прескотта (HP filter).*

Для решения данной задачи установите программный пакет **gretl** для эконометрического анализа.

Скачайте из базы данных Федерального резервного банка Сент-Луиса (St. Louis Federal Bank) следующие квартальные временные ряды за период 1960 : Q1 – 2017 : Q3: реальный ВВП (Real GDP), реальные личные потребительские расходы (Real Personal Consumption Expenditures), реальные валовые частные внутренние инвестиции (Real Gross Private Domestic Investment). Все переменные должны быть выражены в млрд долл. США 2009 г., точность – 3 знака после запятой.

Импортируйте эти переменные в Gretl. Интерпретируйте данные как временные ряды. Считайте, что доходы ( $Y$ ) и ВВП эквивалентны. База данных Федерального резервного банка Сент-Луиса доступна по [ссылке](https://research.stlouisfed.org/fred2/tags/series?t=quarterly)<sup>1</sup>.

- (a) Прочитайте статью в Википедии про декомпозицию Ходрика-Прескотта (Hodrick-Prescott decomposition). Запишите основную формулу и *кратко* объясните своими словами идею, которая за ней стоит. Что произойдет, если значение параметра  $\lambda$  окажется слишком большим? А если слишком маленьким?
- (b) Возьмите уровни (levels) и логарифмы каждого из временных рядов и изобразите их на графике (один график для уровней, второй – для логарифмов). Сравните формы графиков и подумайте, какой из них лучше подходит для практического анализа и почему (любая разумная идея будет оценена). Выполните следующие пункты как для **уровней**, так и для **логарифмов**.
- (c) Используйте фильтр Ходрика-Прескотта, чтобы сгладить временные ряды. Считайте, что  $\lambda = 1600$  (значение по умолчанию). Извлеките остатки (residuals) – изначальные данные минус сглаженные данные. Постройте графики остатков для трех временных рядов (все три графика на одном рисунке).
- (d) На этом же графике постройте линии трендов. Опишите полученный результат.
- (e) Найдите дисперсию циклических компонентов (остатков) этих 3 временных рядов. На основе полученных данных предположите, какой из рядов имеет самые большие флуктуации.

<sup>1</sup><https://research.stlouisfed.org/fred2/tags/series?t=quarterly>

- (f) Найдите корреляцию между циклическими компонентами ВВП и потреблением. Согласуются ли полученные результаты с кейнсианской функцией потребления ( $C = a + bY$ )?
- (g) Постройте гистограмму каждого из остатков. Похожи ли полученные распределения на нормальные? Сопоставьте результаты для уровней и логарифмов.

2. (20 баллов) *Двухпериодная модель с налогами.*

Пусть у домохозяйства есть  $Q_1 = 60$  и  $Q_2 = 90$ . Оно платит налоги в следующем объеме:  $T_1 = 10$ ,  $T_2 = 13$ . Располагаемый доход (disposable income) в каждом периоде составляет  $Q_i - T_i$ . Домохозяйство имеет функцию полезности  $U(C_1, C_2) = \ln C_1 + \ln C_2$ . Рыночная процентная ставка равна  $r = 0.1$ .

- (a) Изобразите бюджетное ограничение и кривые безразличия на графике.
- (b) Рассчитайте оптимальную величину потребления в обоих периодах.
- (c) Теперь дополнительно считайте, что домохозяйство не может брать в долг. Прделайте предыдущие пункты задачи с новым предположением.
- (d) Для каждого из случаев проверьте, выполняется ли Рикардианская эквивалентность (Ricardian Equivalence). Интуитивно объясните полученный результат.

3. (15 баллов) *Кредиторы и заемщики.*

Пусть функция полезности имеет следующий вид:

$$U(C_1, C_2) = \log C_1 + \frac{1}{1 + \delta} \log C_2.$$

Считайте, что  $1/4$  потребителей получает доход лишь в первом периоде ( $Y_1$ ), а остальные потребители – только во втором периоде ( $Y_2$ ). Потребители могут брать в долг друг у друга и давать в долг друг другу.

- (a) Найдите спрос и предложение заемных средств в первом периоде. Запишите его как функцию дохода, фактора дисконтирования и реальной процентной ставки  $r$ .
- (b) Предположим, что государство анонсирует будущее увеличение налогов. Как это повлияет на равновесную процентную ставку? Сопроводите ответ графиком.

4. (15 баллов) *Внезапная смерть.*

Рассмотрим агента, живущего 2 периода. Его функция полезности  $U(c) = \ln c_1 + E \ln c_2$  (знак матожидания потребуется для выполнения последнего пункта). Предположим, что в первом периоде агент работает и получает  $Q$ . Во втором периоде он не работает. Дисконтирование отсутствует. Процентная ставка равна  $r$ .

- (a) Является ли потребитель заемщиком или кредитором? Подкрепите ответ графиком и кратко объясните.

- (b) Прокомментируйте следующее суждение: <поскольку субъективный фактор дисконтирования равен 1, агенты получают одинаковую полезность от единицы потребления в обоих периодах. Тогда  $c_1 = c_2$  и нет необходимости решать оптимизационную задачу>.
- (c) Решите оптимизационную задачу агента и найдите  $c_1, c_2$ . Равны ли они? Как соотносится полученный результат с ответом на предыдущий вопрос?
- (d) Теперь предположим, что агент очень трудолюбив. Поэтому он может умереть от сердечного приступа с вероятностью  $1 - p$  сразу после первого периода. Предположим, что агент знает об этой вероятности. Как это повлияет на его решения об оптимальных  $c_1$  и  $c_2$ ? Стало ли новое  $c_2$  выше или ниже по сравнению с предыдущим пунктом? Обоснуйте аналитически и дайте краткое интуитивное объяснение.

5. (15 баллов)

Джек и Боб действуют в двухпериодной модели потребления. Джек зарабатывает \$70 в первом периоде и \$70 во втором. Боб ничего не зарабатывает в первом периоде, но получает \$147 во втором. Оба агента могут брать или давать деньги в долг по единой процентной ставке  $r$ .

- (a) Рассмотрите ситуацию, когда Джек и Боб потребляют по \$70 в первом периоде и по \$70 во втором. Чему равна процентная ставка  $r$ ?
- (b) Предположим, что процентная ставка увеличилась. Что произойдет с потреблением Джека в первом периоде? Стало ли ему лучше или хуже от повышения ставки?
- (c) Что произойдет с потреблением Боба в первом периоде, когда вырастет процентная ставка? Стало ли Бобу лучше или хуже от повышения процентной ставки?

## Домашнее задание 2.

Общий вес работы: 100 баллов.

1. (12 баллов) *Траектория потребления.*

Пусть агент живет бесконечное число периодов в модели с дискретным временем. Предположим, что ее функция полезности вогнута. Она получает доход  $y$  в каждом периоде, а ставка ее временных предпочтений  $\beta = \frac{1}{1+\rho}$ . Процентная ставка задана и равна  $r$ . Нарисуйте траекторию потребления для каждого из следующих случаев:

- (a)  $r_1 = r_2 = r_3 = \dots = \rho$
- (b)  $r_1 = r_2 = r_3 = \dots > \rho$
- (c)  $r_1 > \rho, r_2 = r_3 = \dots = \rho$
- (d)  $r_1 = r_3 = r_4 = \dots = \rho, r_2 > \rho$
- (e)  $r_1 = r_3 = r_5 = \dots = \rho, r_2 = r_4 = r_6 = \dots > \rho$

2. (12 баллов) *Несовершенный рынок капитала.*

Рассмотрим двухпериодную модель потребления. Пусть  $y_1 = 4, y_2 = 8$ , а функция полезности  $U = -c_1^{-1} - c_2^{-2}$ .

- (a) Предположим, что рынок заемных средств несовершенен и агенты могут брать деньги в долг по ставке  $r_b = 400\%$ , но при этом сберегать лишь по ставке  $r_s = 50\%$ . Точно изобразите на графике бюджетное множество потребителя и опишите его аналитически. Найдите оптимальную пару  $(c_1, c_2)$  и сбережения  $s$ .
- (b) Предположим, что благодаря недавней банковской реформе теперь  $r_b = r_s = 44\%$ . Как изменилось поведение потребителя? Найдите новую пару  $(c_1, c_2)$ . Изобразите и объясните направления эффектов дохода и замещения (вычислять точное значение эффектов не требуется).

3. (23 балла) *Функция инвестиций.*

Пусть выпуск репрезентативной фирмы, действующей в экономике на протяжении 3 периодов, описывается производственной функцией Кобба-Дугласа (Cobb-Douglas production function) с постоянной отдачей от масштаба. Доля капитала в выпуске равна  $\frac{1}{3}$ . Размер труда в экономике постоянен и равен 1. Пусть также параметр технологической продуктивности  $A = 1$ . Допустим, что начальный уровень стоимости капитала равен общему уровню цен и равен 1, а начальный запас капитала  $K_1 = 20$ . Темпы роста цен на капитал совпадают с темпами инфляции. Капитал полностью изнашивается за 10 периодов.

- (a) Выведите функцию инвестиций в первом и во втором периоде (в третьем периоде инвестиции отсутствуют)

Теперь дополнительно предположите, что потребитель с функцией полезности  $U = \log C_1 C_2 C_3$  владеет фирмой с ранее описанной производственной функцией. Агент имеет 1 единицу труда и платит себе зарплату за работу в фирме. Также потребитель владеет капиталом (в издержки не входит арендная плата). Тогда доход потребителя в каждом периоде равен сумме прибыли фирмы и факторного дохода от труда.

- (b) Запишите бюджетное ограничение потребителя и его максимизационную задачу.
- (c) Выведите функцию инвестиций в первом и втором периодах для данного случая (инвестиций в третьем периоде по-прежнему нет). В чем заключается проблема разделения потребления и инвестиций? Присутствует ли она в данной задаче?

4. (23 балла) *Инвестиции с модифицированными издержками.*

Рассмотрим модель с дискретным временем и бесконечным временным горизонтом. Предположим, что репрезентативная фирма имеет следующую производственную функцию:  $F(K_t, L_t) = AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$ , где, как обычно,  $0 < \alpha < 1$ . Пусть также количество труда фиксировано и равно 1 для всех  $t$ . Ставка износа капитала равна  $\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ); реальная процентная ставка в экономике равна  $r$  и постоянна во времени.

- (a) Выведите желаемый уровень капитала как функцию от экзогенных параметров модели.

Теперь предположим, что фирма несет издержки как за отклонение от желаемого уровня капитала, так и за чистые инвестиции. Обе функции издержек квадратичны. Так, функция потерь фирмы имеет следующий вид:  $Loss = c_1(K^* - K_{t+1})^2 + c_2(K_{t+1} - K_t)^2$ , где  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ .

Пред-

положим, что изначальный уровень капитала равен  $K_0 = 2\left(\frac{\alpha A}{r+\delta}\right)^{1-\alpha}$ . Сравните его с желаемым уровнем капитала.

- (b) Найдите выражение для уровня капитала в момент времени  $t$  как функцию от времени и экзогенных параметров модели.
- (c) Найдите предел  $K_t$  при  $t \rightarrow \infty$ . Выглядит ли выражение, полученное в предыдущем пункте, корректным?
- (d) Рассчитайте совокупные инвестиции в периоде  $t$  как функцию от  $t$  и экзогенных параметров модели.

5. (30 баллов) *Траектория потребления на бесконечном временном горизонте.*

Два агента оптимизируют свои траектории потребления на бесконечном временном горизонте и обладают различными функциями полезности.

Во время как полезность агента  $u$  имеет вид:

$$U(c_1, c_2, c_3, \dots) = 3 \ln c_1 + \frac{3 \ln c_2}{1 + \rho} + \frac{3 \ln c_3}{(1 + \rho)^2} + \dots,$$

полезность агента  $v$  задается выражением:

$$V(c_1, c_2, c_3, \dots) = \sqrt[3]{c_1} + \frac{\sqrt[3]{c_2}}{1 + \rho} + \frac{\sqrt[3]{c_3}}{(1 + \rho)^2} + \dots$$



---

Агенты  $u$  и  $v$  обладают одинаковой траекторией дохода:  $y_1, y_2, y_3, \dots$ . Кроме того, у них совпадают предпочтения по отношению ко времени, а ставка процента для них одинакова.

- (a) Покажите, что обе функции полезности удовлетворяют стандартным предположениям, действующим в нашей модели.
- (b) Найдите отношение между объемами потребления в двух смежных по времени периодах для обоих агентов.
- (c) Может ли случиться так, что оба агента обладают одной и той же траекторией потребления? Объясните свой ответ.
- (d) Предположим, что ставка процента  $r$  ниже, чем  $\rho$ .
  - i. Как выглядит траектория потребления?
  - ii. Изобразите траектории потребления обоих агентов и сопоставьте их.
- (e) Предположим, что агент  $u$  ожидает увеличения своего дохода на  $x$  начиная с 3 периода.
  - i. Как изменится траектория потребления агента  $u$ ?
  - ii. Зависит ли ваш ответ на предыдущий вопрос от того,  $r \leq \rho$  или  $r \geq \rho$ ?
  - iii. Изобразите все возможные случаи.

### Домашнее задание 3.

Общий вес работы: 100 баллов.

#### 1. Предложение труда.

Рассмотрим домохозяйство с функцией полезности вида:  $u(c, l) = \log(c) + \alpha \log(1 - l)$ . Домохозяйство может работать  $l$  часов и зарабатывать  $wl$ . Оно не имеет иных источников дохода или изначального богатства. Домохозяйство действует в экономике с процентной ставкой  $r$ , имеет фактор дисконтирования  $\beta$ .

- Предположим, что домохозяйство живет лишь 1 период (не существует будущего для дисконтирования). Найдите оптимальное потребление и предложение труда. Прокомментируйте роль заработной платы и параметра  $\alpha$  в вашем ответе.
- Предположим, что домохозяйство живет два периода, а зарплаты в этих периодах равны  $w_1$  и  $w_2$  соответственно. Найдите уравнение, связывающее предложение труда в периодах 1 и 2. Прокомментируйте роль зарплат, параметра  $\alpha$ , процентной ставки и фактора дисконтирования в полученном уравнении.

#### 2. Совокупный спрос.

Рассмотрим совокупный спрос в закрытой экономике. Предположим, что потребление линейно зависит от текущего располагаемого дохода, процентной ставки и ожидаемого будущего располагаемого дохода. Допустим, что спрос на инвестиции также линейно зависит от процентной ставки и ожидаемой будущей предельной отдачи от капитала (marginal productivity of capital).

- Выразите совокупный спрос в явной форме в терминах государственных закупок, налогов, ожидаемого будущего располагаемого дохода, ожидаемой будущей предельной отдачи от капитала и процентных ставок. Кратко объясните смысл каждого слагаемого и его знак.
- Что происходит с совокупным спросом при повышении (снижении) уровня цен в экономике? Отобразите зависимость на графике.
- При помощи модели IS-LM исследуйте, как снижение предложения денег повлияет на совокупный спрос.
- При помощи модели IS-LM исследуйте, как увеличение ожидаемого будущего располагаемого дохода отразится на совокупном спросе.

#### 3. Определение краткосрочного выпуска в закрытой экономике.

В закрытой экономике равновесный уровень выпуска ниже, чем в случае полной занятости. Государство рассматривает различные меры, направленные на повышение выпуска и занятости. Проанализируйте эффекты следующих государственных мер на выпуск и его компоненты при помощи модели IS-LM:

- (a) Увеличение государственных закупок, финансируемое за счет налогов.
- (b) Снижение налогов.

4. *Определение краткосрочного выпуска в закрытой экономике*

В закрытой экономике при равновесном объеме выпуска наблюдается полная занятость. Имеется дефицит бюджета, который государство хочет сократить. Однако государство беспокоится о возможности рецессии в экономике. Что могут предпринять государство и центральный банк, чтобы снизить величину бюджетного дефицита, но не загнать экономику в рецессию. Проведите анализ при помощи модели IS-LM.

5. *IS-LM.*

Рассмотрите экономику со следующей структурой:

- Потребление:  $C = 0.8(Q - T)$
- Инвестиции:  $I = 20 - 0.4i$
- Государственные расходы:  $G = 10$
- Налоги:  $T = 20$
- Предложение денег:  $M^s = 50$
- Спрос на деньги:  $M^D = (0.5Q - \lambda)P$
- Совокупное предложение абсолютно эластично (предельный кейнсианский случай) при уровне цен  $P = 2$ .

Проделайте следующие упражнения:

- (a) Найдите кривую IS и кейнсианский мультипликатор.
- (b) Найдите кривую LM.
- (c) Найдите равновесную процентную ставку и совокупный спрос.
- (d) Найдите кривую совокупного спроса.
- (e) Оцените эффект на уровень выпуска, процентную ставку и уровень цен, если государственные расходы увеличатся до  $G = 12$ .
- (f) Решите предыдущую задачу для классического случая (пусть  $Q = 60$ ).

### Домашнее задание 4.

Общий вес работы: 100 баллов.

1. (25 баллов) Прodelайте следующие упражнения. В каждом пункте считайте, что экономика закрыта.
  - (a) Прокомментируйте следующее суждение:  
<Во время Великой депрессии (Great Depression) Центральный банк старался придерживаться стимулирующей денежно-кредитной политики. Безусловно, денежная база значительно увеличилась. Однако это только снизило выпуск. Данный факт очевидным образом опровергает модель IS-LM.>
  - (b) Выскажите свое мнение по поводу следующих государственных планов: Государство не хочет изменять выпуск. Однако оно явно хочет тратить больше. Чтобы сбалансировать бюджет, государство планирует увеличить как налоги, так и государственные расходы:  $\Delta G = \Delta T > 0$ . Поскольку  $\Delta T = \Delta G$ , в результате проведения данной политики выпуск не изменится.
  - (c) Государство хочет повысить инвестиции, но не хочет изменять выпуск. Более того, предположим, что государство не может влиять на ожидания людей. Сможет ли оно достичь желанного эффекта в следующих случаях:
    - i. Центральный банк независим и хочет держать предложение денег неизменным.
    - ii. Центральный банк и государство действуют сообща.
2. (25 баллов) Рассмотрим малую открытую экономику с фиксированным валютным курсом. Проанализируйте эффекты следующих действий, используя графики. Объясните эффекты и расскажите, как стоит действовать Центральному банку в каждом случае, чтобы удержать валютный курс на текущем уровне.
  - (a) Государство разрешает банковскую деятельность в интернете после долгого запрета.
  - (b) Страна вступила в ВТО (WTO), а потребители предпочитают импортные товары отечественным.
  - (c) Государство решило потратить  $G$ .
3. (25 баллов)  
Проведите анализ при помощи модели IS-LM.  
В определенном временном периоде общественность формирует ожидания о снижении валютного курса в силу большого дефицита чистого экспорта

---

(NX). Опишите, как эти ожидания повлияют на равновесие на стадии, когда цены еще не изменились и ожидания еще не реализовались (но они еще присутствуют).

(a) Что произойдет с процентной ставкой, выпуском, предложением денег и резервами иностранной валюты?

(b) Могут ли эти ожидания ускорить обесценение национальной валюты?

4. (25 баллов) Предположим, что начальное состояние экономики — долгосрочное равновесие. Государство в одинаковой степени увеличивает расходы и налоги. Проанализируйте эффект данной политики на экономику в краткосрочном периоде, процесс конвергенции к долгосрочному равновесию и новое долгосрочное равновесие.

(a) Проанализируйте изменения в источниках дохода ( $Y$ ) и его использовании ( $C$ ,  $G$ ,  $I$  и  $NX$ ). Сравните краткосрочное равновесие с начальным состоянием.

(b) Дополнительно уточните, как эти изменения влияют на цены, номинальную и реальную зарплату, реальный обменный курс, резервы иностранной валюты Центрального банка, внешний долг и разницу между внешним долгом и резервами (чистый внешний долг).

(c) Следуя инструкциям предыдущих пунктов сравните новое долгосрочное равновесие с изначальным.

### Домашнее задание 5.

Общий вес работы: 100 баллов.

1. (50 баллов) Прокомментируйте следующие утверждения. Будьте как можно более кратким и не превышайте объема в 50 слов при ответе на каждый вопрос. Однако вы можете использовать столько графиков, сколько вам потребуется (если, конечно, вы не захотите использовать более 4 для каждого вопроса)
  - (a) (15 баллов) Рассмотрим закрытую экономику. Предположим, что Центральный банк активно скупает государственные облигации. В результате  $M$  увеличивается и кривая  $LM$  сдвигается вправо, поэтому вырастает как  $Y$ , так и  $i$ . Если иных изменений не происходит, то это новое равновесие (как краткосрочное, так и долгосрочное).
  - (b) (15 баллов) Рассмотрим закрытую экономику с кейнсианской кривой  $AS$ . Предположим, что государство решает заморозить цены. В этом случае фискальная политика более эффективна, чем в отсутствие фиксации цен.  
Как изменится ответ на вопрос, если кривая  $AS$  классическая?
  - (c) (20 баллов) Рассмотрим открытую экономику с фиксированным обменным курсом. Государство хочет увеличить выпуск в краткосрочном периоде. Предположим, что государство может только увеличить или уменьшить предложение денег (фискальная политика недоступна). Однако монетарная политика бесполезна при фиксированном обменном курсе. Значит, государство никак не может увеличить выпуск.
2. (50 баллов) *Определение выпуска в открытой экономике с плавающим обменным курсом.*

В данной задаче рассматривается экономика с плавающим обменным курсом и абсолютной мобильностью капитала между экономикой и миром. Предположим, что начальная позиция экономики – долгосрочное равновесие. Проанализируйте эффект от следующих изменений в экономике на краткосрочное равновесие, процесс конвергенции к долгосрочному равновесию и новое долгосрочное равновесие.

  - (a) (13 баллов) Увеличение государственных расходов, финансируемое за счет эмиссии государственных облигаций населению.
  - (b) (11 баллов) Увеличение государственных расходов, финансируемое за счет налогов.
  - (c) (13 баллов) Центральный банк снижает предложение денег посредством продажи государственных облигаций населению.
  - (d) (13 баллов) Центральный банк скупает государственные облигации у населения на открытом рынке.

Проанализируйте источники доходов и расходов; сравните краткосрочное равновесие с начальной позицией. Кроме того, детализируйте эффект этих изменений на цены, номинальную и реальную зарплаты, реальную процентную ставку. Следуя данным инструкциям также сравните новое долгосрочное равновесие с начальной позицией.

## Макроэкономика 3

### Задания для промежуточной аттестации

Примеры задач.

#### 1. Сбережения и рост в модели с тремя поколениями.

Рассмотрим чистую экономику наделения (pure endowment economy) с мировой ставкой процента  $r = 0$ . Резиденты живут три периода, и в любой из этих периодов сосуществуют три различных поколения одинаковых размеров (нормированных к 1). Молодые не могут занимать и должны либо сберегать какую-то положительную сумму, либо потреблять свой доход,  $y^Y$ . Члены поколения среднего возраста наделены денежными средствами в размере  $y^M$  и могут занимать или сберегать. Старые обладают суммой  $y^O$  и либо потребляют все свои сбережения, либо выплачивают все свои долги перед смертью. У всех индивидов одинаковая функция полезности,  $U(c^Y, c^M, c^O) = \log c^Y + \log c^M + \log c^O$  (т. е.  $\beta = 1$ ).

- Предположим,  $y^M = (1 + e)y^Y$  и  $y^O = 0$ , где  $e > 0$ . Посчитайте сбережения всех трёх поколений как функции от  $y^Y$  и  $e$ .
- Пусть темп прироста совокупного выпуска равен  $g > 0$ , где  $y_{t+1}^Y = (1 + g)y_t^Y$ . Чему равна норма сбережения в совокупном выпуске  $Y_t$ ?
- Предположим, что  $e$  выросла. Каков будет эффект на норму сбережения? Как изменится ваш ответ, если разрешить молодым занимать?
- Предположим, что молодые могут занимать и что их доход растёт в соответствии с  $y_{t+1}^Y = (1 + g)y_t^Y$ . Однако,  $y^O = 0$  и  $y^M$  остаются постоянными в течение времени. Как норма сбережения в момент  $t$  зависит от  $g$ ? Ответьте на тот же вопрос, предполагая, что доход жителей среднего возраста растёт с темпом  $g$ , а доходы молодых и старых остаются постоянными.

#### 2. Модель Сидрауского в непрерывном времени.

Рассмотрим непрерывную версию модели Сидрауского. В закрытой экономике живёт бессмертное репрезентативное домохозяйство с предпочтениями

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} \log c_t + \chi \log \frac{M_t^d}{P_t} dt$$

где  $\rho > 0$ ,  $\chi > 0$ . В каждом периоде домохозяйство располагает единицей труда, и предложение труда является неэластичным. Производится единственный товар, который может быть использован как для потребления, так и в целях накопления капитала. Технология описывается производственной функцией Кобба-Дугласа  $y_t = F(k_t, l_t) = k_t^\alpha l_t^{1-\alpha}$  где  $k_t$  и  $l_t$  — это капитал и



труд соответственно,  $0 < \alpha < 1$ . Амортизация капитала равна нулю. Деньги вводятся в экономику через единовременный трансфер со стороны государства:

$$\frac{\dot{M}_t}{P_t} = \tau_t$$

Рынки товаров и факторов производства совершенно конкуренты.

- Запишите однопериодное бюджетное ограничение домохозяйства.
- Сформулируйте условную максимизационную задачу домохозяйства. Выведите условия первого порядка.
- Сформулируйте задачу максимизации прибыли репрезентативной фирмы.
- Запишите определение равновесия в данной экономике.
- Покажите, что равновесие может быть описано с помощью следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}_t}{c_t} &= f'(k_t) - \rho \\ \dot{k}_t &= f(k_t) - c_t \\ \chi \frac{P_t \dot{C}_t}{M_t} &= f'(k_t) + \pi_t \end{aligned}$$

где  $f(k) \equiv F(k, 1)$ ,  $\pi_t \equiv \dot{P}_t/P_t$ , и  $k_0$

даны. (f) Найдите устойчивое состояние.

- Предположим, что предложение денег остаётся постоянным, тогда как начальный запас капитала  $k_0$  находится ниже уровня устойчивого состояния  $k^*$ . Найдите равновесные траектории потребления, капитала, реальной и номинальной ставок процента, уровня цен и темпа инфляции.
- Теперь рассмотрим иной сценарий. Предположим, что изначально экономика находится в устойчивом состоянии и ожидается, что предложение денег будет оставаться на постоянном уровне  $M$ . В момент  $t = 0$  становится известным, что в будущую дату  $t = T$  предложение денег перманентно поднимется до нового уровня  $M^f = 1.1 \times M$ . Найдите равновесные траектории потребления, капитала, реальной и номинальной процентных ставок, уровня цен и темпа инфляции.

### 3. Временный производственный шок в малой открытой экономике с затратами на установку капитала.

Время непрерывно. В малой открытой экономике живёт репрезентативное домохозяйство с предпочтениями

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$

где  $\rho > 0$ ,  $\theta > 0$ . В каждом периоде домохозяйство располагает одной единицей труда. Предложение труда является неэластичным. Производится единственный товар, который может быть либо потреблён, либо трансформирован в новый капитал. Производство капитала связано с дополнительными издержками: увеличение запаса капитала на  $i_t$  требует

$$i_t = 1 + \frac{\kappa}{2} \frac{i_t}{k_t}$$

единиц конечного товара, где  $\kappa > 0$  и  $k_t$  — это установленный запас капитала на момент времени  $t$ . Технология производства конечного товара описывается производственной функцией Кобба-Дугласа  $y_t = F(k_t, l_t) = \omega_t k_t^\alpha l_t^{1-\alpha}$  где  $k_t$  и  $l_t$  — капитал и труд соответственно, а  $\omega$  — параметр, отвечающий за совокупную производительность факторов производства (СПФ),  $0 < \alpha < 1$ . Амортизация капитала равна нулю. Домохозяйство может занимать или давать в долг остальному миру по ставке процента  $r = \rho$ . Начальный запас чистых зарубежных активов равен  $b_0$ .

- (а) Предположим, что  $\omega_t$  остаётся на постоянном уровне  $\omega$ . Покажите, что динамика капитала описывается системой двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{q_t - 1}{\kappa}$$

$$\dot{q}_t = r q_t - f'(k_t) - \frac{(q_t - 1)^2}{2\kappa}$$

где  $f(k) \equiv F(k, 1)$ ,  $q_t$  — теневая цена капитала в централизованной/плановой экономике или рыночная цена капитала в децентрализованной экономике.

- (b) Найдите значения капитала, инвестиций, выпуска, потребления, цены капитала, реальной ставки процента, чистой международной инвестиционной позиции и счёта текущих операций в устойчивом состоянии.
- (c) Предположим, что изначально экономика находится в устойчивом состоянии с  $\omega_t = \omega$ . В момент  $t = 0$  в экономике происходит временный шок продуктивности, который увеличивает СПФ с  $\omega_t = \omega$  до  $\omega_t = \omega^f > \omega$  до момента времени  $t = T > 0$ . В момент  $t = T$  и далее ожидается, что СПФ вернётся на свой изначальный уровень  $\omega_t = \omega$  и будет оставаться на нём неопределённое количество времени. Нарисуйте равновесные траектории капитала, инвестиций, выпуска, потребления, цены капитала, реальной ставки процента, чистой международной инвестиционной позиции и счёта текущих операций прямо перед шоком и после него. Объясните.

#### 4. Модель Шумпетерианского роста в дискретном времени с выпуклой функцией затрат на НИОКР.

Время дискретно:  $t = 0, 1, 2, \dots$ . В каждом периоде сосуществуют  $L$  индивидов, каждый из которых живёт лишь в течение этого периода и наделён

одной единицей труда. Предложение труда является неэластичным. Полезность индивида зависит только от его потребления, и он нейтрален к риску. Его единственной целью является максимизация ожидаемого потребления.

Индивиды потребляют единственный товар, называемый "конечным" товаром, который производится совершенно конкурентными фирмами с использованием труда и промежуточных продуктов. Существует континуум промежуточных продуктов, проиндексированных на интервале  $[0, 1]$ . Функция производства конечного товара задана следующим образом

$$Y_t = L^{1-\alpha} \int_0^1 A_{it}^{1-\alpha} x_{it}^\alpha di, \quad 0 < \alpha < 1$$

где каждая  $x_{it}$  — это поток промежуточного продукта  $i$ , используемого в момент  $t$ , и параметр продуктивности  $A_{it}$  отражает качество этого продукта. В любой период параметр продуктивности отличается для разных промежуточных продуктов из-за случайности процесса инноваций. Каждый промежуточный продукт производится монополистом в каждый период с использованием только конечного товара. Конечный выпуск, который не был использован для промежуточного производства, доступен для потребления и исследований.

В каждый период есть один индивид ("предприниматель") в каждом секторе  $i \in [0, 1]$ , у которого есть возможность сделать инновацию. Если ему это удаётся, инновация создаёт новую версию репрезентативного промежуточного продукта  $i$ , который более продуктивен, чем предыдущие версии. В точности, параметр продуктивности промежуточного продукта  $i$  повышается с уровня прошлого периода  $A_{i,t-1}$  до  $A_{it} = \gamma A_{i,t-1}$ , где  $\gamma > 1$ . Если попытка сделать инновацию завершается неудачей, то в период  $t$  нет никаких инноваций и промежуточный продукт  $i$  остаётся таким же, что был использован в  $t-1$ , т. е.  $A_{it} = A_{i,t-1}$ .

В целях инноваций предприниматель должен проводить исследования. Это связанная с издержками деятельность, которая использует только конечный продукт. Как было сказано ранее, исследования сопряжены с неопределённостью, то есть в результате может не быть сгенерирована инновация. Вероятность  $\mu_{it}$ , с которой в период  $t$  случается инновация, зависит от количества конечного продукта  $R_{it}$ , потраченного на исследования, следующим образом

$$\mu_{it} = \varphi \frac{R_{it}}{A_{i,t}^*} = \lambda \frac{R_{it}}{A_{i,t}^*}^\sigma, \quad 0 < \sigma < 1, \lambda > 0$$

где  $A_{i,t}^* = \gamma A_{i,t-1}$ ,  $\gamma > 1$  это продуктивность новой версии промежуточного продукта  $i$ , которая будет создана, если исследования закончатся успехом.

Если предприниматель делает инновацию в момент  $t$  в секторе  $i$ , он становится промежуточным монополистом в этот период, потому что он может производить лучший продукт, нежели кто-либо ещё. В ином случае статус монополии случайным образом получает кто-то, кто может производить продукт прошлого периода.

- (a) Покажите, что равновесная прибыль производителя промежуточного продукта  $i$  равна

$$\Pi_{it} = \pi A_{it} L, \quad \pi \equiv (1 - \alpha) \alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$$

- (b) Покажите, что равновесный выпуск конечного товара равен

$$Y_t = \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} A_t L, \quad \text{где } A_t \equiv \int_0^1 A_{it} di$$

- (c) Объясните, почему в равновесии расходы на исследования в секторе  $i$ ,  $R_{it}$ , выбираются с целью максимизации

$$\varphi \frac{R_{it}}{A_{it}^*} \Pi_{it}^* - R_{it}$$

$$\text{где } \Pi_{it}^* \equiv \pi A_{it}^* L.$$

- (d) Найдите равновесные расходы на исследования  $R_{it}$  и вероятности успешных инноваций  $\mu_{it}$ ,  $i \in [0, 1]$ . Отличаются ли они для различных секторов?
- (e) Найдите темп роста этой экономики. От каких параметров модели он зависит? Для каждого параметра, влияющего на равновесный темп роста, приведите интуицию.
- (f) Является ли равновесный темп роста эффективным по Парето? Почему или почему нет? Объясните.

### 5. Модель Деньги-в-Полезности (Money-in-Utility) I.

Модель Деньги-в-Полезности подразумевает, что предельная норма замещения между деньгами и потреблением равна  $i_{t+1} / (1 + i_{t+1})$ . Эта модель предполагает, что агенты входят в период  $t$  с ресурсами  $\omega_t$  и используют их для покупки капитала, потребления, номинальных облигаций и денег. Реальная стоимость этих денежных средств дает полезность в период  $t$ . Предположим, что количество денежных средств, выбранное в период  $t$  не даёт какой-либо полезности до периода  $t + 1$ . Полезность задана функцией  $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, M_t/P_t)$ , но бюджетное ограничение принимает форму

$$\omega_t = C_t + \frac{M_{t+1}}{P_t} + \frac{B_{t+1}}{P_t} + K_{t+1}$$

и домохозяйство выбирает  $C_t$ ,  $K_{t+1}$ ,  $B_{t+1}$  и  $M_{t+1}$  в период  $t$ . Реальное богатство домохозяйства  $\omega_t$  выражается следующим образом

$$\omega_t = F(K_t, A_t) + (1 - \delta)K_t + \frac{(1 + i_t)B_t}{P_t} + \frac{M_t}{P_t} + T_t$$

Выведите условия первого порядка для выбора домохозяйством  $M_{t+1}$  и покажите, что

$$\frac{u_m(C_t, m_t)}{u_c(C_t, m_t)} = i_t$$

### 6. Модель Деньги-в-Полезности (Money-in-Utility) II.

Предположим, что полезность репрезентативного домохозяйства зависит от потребления и уровня реальных денежных средств, доступных для покупки потребления. Пусть  $A_t/P_t$  – реальный запас денег, входящий в функцию полезности. Если игнорировать капитал, то целью домохозяйства является максимизация  $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, A_t/P_t)$  при бюджетном ограничении

$$Y_t + \frac{M_{t-1}}{P_t} + T_t + \frac{(1+i_t)B_t}{P_t} = C_t + \frac{M_t}{P_t} + \frac{B_{t+1}}{P_t}$$

где доход  $Y_t$  – экзогенный процесс. Предположим, что запас денег, который даёт домохозяйству полезность, – это реальная стоимость денежных средств после покупки облигаций, но до получения дохода или покупки потребительских товаров:

$$\frac{A_t}{P_t} = \frac{M_{t-1}}{P_t} + T_t + \frac{(1+i_t)B_t}{P_t} - \frac{B_{t+1}}{P_t}$$

- Выведите условия первого порядка для  $A_t$  и  $B_{t+1}$ .
- Чем эти условия отличаются от условий для классической модели Деньги-в-Полезности?

### 7. Супернейтральность денег.

Предположим, что функция полезности репрезентативного домохозяйства имеет вид  $u(C, m) = (1 - \gamma) \ln C + \gamma \ln m$ . Покажите, что если потребление в устойчивом состоянии постоянно, то существует единственный устойчивый запас капитала  $k^{SS}$ , что  $\beta f_k(k^{SS}) + 1 - \delta = 1$ . Объясните, почему изменения в темпе роста предложения денег не влияют на устойчивый уровень  $k$  в данном случае, но влияют, когда функция полезности имеет следующий вид

$$u(C, m) = \frac{(C^{1-\varphi} m^\gamma)^{1-\varphi}}{1-\varphi}$$

с  $\varphi < 1$  и  $\gamma \in (0, 1)$ .

### 8. Начисление процента на остаток денежных средств.

Предположим, что на денежные средства платится номинальная ставка процента  $\tilde{r}^m$ . Эти платежи финансируются комбинацией единовременного налога и печати денег. Пусть  $a$  – доля, финансируемая единовременным налогом. Бюджетное тождество государства записывается в виде  $\tau_t + v_t = \tilde{r}^m m_t$ , с  $\tau_t = a \tilde{r}^m m_t$  и  $v_t = \theta m_t$ . Используя модель Сидрауского, сделайте следующее:

- Покажите, что отношение предельной полезности денег к предельной полезности потребления (приблизительно) равно  $r + \pi - \tilde{r}^m = i - \tilde{r}^m$ . Объясните почему.
- Покажите, как метод финансирования процентов, выплачиваемых на денежные средства, влияет на  $i - \tilde{r}^m$ . Объясните экономическую интуицию, стоящую за полученным результатом.

9. Выводы модели расширяющего разнообразия (*expanding variety model*) для государственной политики.

Рассмотрим модель расширяющегося разнообразия.

- (a) Покажите, что государство может обеспечить наиболее эффективное равновесие, если оно использует единовременный налог для финансирования субсидий в промежуточные продукты. Какая норма субсидирования должна быть для этого использована? *Опционально*: Почему в более обширной версии модели сложно проводить требуемую политику?
- (b) Может ли государство обеспечить наиболее эффективное равновесие, если оно опирается лишь на субсидии в исследования и разработку (финансируемые, опять же, единовременным налогом)? Объясните свой ответ. *Опционально*: В какой модификации модели государству было бы важно субсидировать исследования?

10. Продолжительность монопольной позиции.

Рассмотрим модель расширяющегося разнообразия в стандартной постановке, в которой монополизированные промежуточные продукты становились с вероятностью  $p$  на момент времени.

- (a) Как изменения в  $p$  влияют на свойства устойчивого состояния этой модели?
- (b) Какие политические меры со стороны государства приведут к наиболее эффективному равновесию в этой модели? В частности, достижимо ли наиболее эффективное равновесие только лишь за счёт субсидирования закупок монополизированных промежуточных продуктов?
- (c) Если государство может влиять на  $p$  через различные инструменты (такие как антитрестовское законодательство или защита патентов), какие выводы относительно требуемых политических мер следуют из модели?

11. Нерезкие инновации (*Non-drastic innovations*).

Проанализируйте базовую модель Шумпетерианского роста, предполагая, что условие

$$\lambda \geq \frac{1}{1 - \beta^{\frac{1-\beta}{\beta}}}$$

не выполнено.

- (a) Покажите, что монополисты устанавливают лимитирующую цену.
- (b) Опишите равновесный темп роста на траектории сбалансированного развития.
- (c) Опишите Парето-оптимальное распределение и сравните его с равновесным.

(d) Теперь рассмотрим гипотетическую экономику, в которой производитель наиболее качественной продукции прошлого периода исчезает, так что монополист может требовать маржу в размере  $1/(1 - \beta)$  вместо лимитирующей цены. Покажите, что темп роста на траектории сбалансированного развития в этой гипотетической экономике строго выше, чем темп роста, описанный в пункте b. Объясните результат.

12. *Модель Шумпетерианского роста без эффекта масштаба.*

Предположим, что население растёт экспоненциально с постоянным темпом  $n$ . Модифицируйте базовую модель Шумпетерианского роста так, чтобы эффект масштаба отсутствовал и экономика росла с постоянным темпом (с положительным ростом дохода на душу населения). [Подсказка: предположите, что одна единица конечного товара, потраченная на исследования и разработку для улучшения оборудования качества  $q$ , приводит к потоку инноваций с темпом, равным  $v/q^\varphi$ , где  $\varphi > 1$ .]

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1.

1. Рассмотрите модель Солоу с леонтьевской производственной функцией

$$F(K, L) = \min\{AK, BL\},$$

где  $A > 0$ ,  $B > 0$ , темпом роста населения  $n \geq 0$ , нормой амортизации  $\delta > 0$ , нормой накопления  $s \in (0, 1)$ . Пусть также выполняется условие  $A > n + \delta$ .

- (a) Докажите, что производственная функция имеет постоянную отдачу от масштаба.
- (b) Нарисуйте на диаграмме функцию  $f(k) = F(k, 1)$ . Выполняются ли для неё условия Инады?
- (c) Докажите, что найдётся такое  $\bar{s} > 0$ , что при всех  $s > \bar{s}$  в экономике существуют два стационарных состояния, а при  $s < \bar{s}$  только одно. Найдите  $\bar{s}$ .
- (d) Что вы можете сказать об устойчивости стационарных состояний при  $s > \bar{s}$ ? При  $s < \bar{s}$ ? Объясните интуитивно.

2. Даны две страны – Север (N) и Юг (S), экономики которых описываются моделью Солоу в непрерывном времени с техническим прогрессом. Производственные функции Севера и Юга имеют вид:

$$Y_i(t) = F(K_i(t), A_i(t)L_i(t)) \quad (i = N, S),$$

где  $F(\cdot, \cdot)$  – вогнутая функция с постоянной отдачей от масштаба, для которой выполняются условия Инады. Технический прогресс Севера экзогенный и описывается уравнением  $A_N(t) = A_N(0)e^{gt}$ , где  $A_N(0)$  задано. Юг заимствует технологии Севера с запаздыванием в  $\tau$  лет:

$$A_S(t) = A_N(t - \tau).$$

Обе страны характеризуются одинаковыми нормой накопления  $s \in (0, 1)$ , нормой амортизации капитала  $\delta > 0$  и темпом роста населения  $n$ .

- (a) Обозначьте через  $k_i(t) = \frac{K_i(t)}{A_i(t)L_i(t)}$  – капиталовооружённость в экономике  $i$  и выпишите уравнение движения капитала и капиталовооружённости.
- (b) Докажите, что в устойчивых стационарных режимах значение капиталовооружённости  $k^*$  одинаковое для обеих стран.



- (c) Пусть обе экономики находятся в устойчивых стационарных режимах. Чему равны темпы роста их ВВП? Чему равно отношение значений их подушевого ВВП  $\frac{Y_N(t)/L_N(t)}{Y_S(t)/L_S(t)}$ ?
- (d) Пусть величина  $g = 0.03$  (что приближённо соответствует росту  $A_N(t)$  в 3% в год). Чему равно запаздывание  $\tau$ , если подушевой ВВП в стационарном состоянии на Севере в 10 раз больше, чем на Юге? Прокомментируйте полученный результат. *Указание:*  $\ln 10 \approx 2.3$ .
3. Постройте централизованную модель Рамсея в непрерывном времени с техническим прогрессом, воплощённым в росте производительности труда, с производственной функцией  $F(A, K, L) = F(K, AL)$ , где  $A_t = e^{gt}$ ,  $0 < g < \theta$ , где  $\theta$  – норма временных предпочтений. Мгновенная функция полезности потребителя зависит от подушевого потребления  $u(C/L) = (C/L)^\gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ . Население растёт с темпом  $n > 0$ , норма амортизации капитала  $\delta = 0$ .
- (a) Сформулируйте задачу центрального планирования, введя переменные  $k = K/AL$ ,  $c = C/AL$ .
- (b) Выпишите необходимые условия оптимальности (дополнив их условием трансверсальности).
- (c) На фазовой диаграмме в координатах  $(k, c)$  изобразите траекторию, по которой движется экономика.
- (d) Пусть в момент времени  $t = 0$  экономика находится в стационарном состоянии. С помощью фазовой диаграммы опишите, что произойдёт с экономикой при неожиданном скачкообразном увеличении темпа роста технологии  $g$  (при этом так как темп роста производительности  $g$  увеличивается в момент  $t = 0$ , то сама траектория  $A_t$  является непрерывной). Как при этом поведут себя  $k_t$  и  $c_t$ ? Как поведут себя подушевые величины  $K_t/L_t$  и  $C_t/L_t$ ? Объясните получившееся поведение.
4. Рассмотрите централизованную модель Рамсея закрытой экономики в дискретном времени

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} (1 + \theta)^{-t} u(c_t) \rightarrow \max \\ & \text{s. t. } (1 + n)k_{t+1} - k_t = f(k_t) - c_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \\ & c_t \geq 0, k_t \geq 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots \\ & k_0 \text{ задано,} \end{aligned}$$

где  $u(c)$  и  $f(k)$  – строго возрастающие строго вогнутые функции, для которых выполняется условие Инады. Кроме того,  $f(0) = 0$ .

- (a) Найдите необходимые условия оптимальности с помощью метода Лагранжа.

- (b) Дополните полученные условия первого порядка условием трансверсальности и докажите, что этого становится достаточно для того, чтобы траектория была оптимальной.
- (c) Воспользуйтесь вогнутостью  $u(c)$  и  $f(k)$  и докажите единственность оптимальной траектории.
- (d) Докажите правило Кейнса-Рамсея

$$\frac{u'(c_{t-1})(1 + \theta)}{u'(c_t)} = \frac{1 + f'(k_t)}{1 + n}.$$

## Домашнее задание 2.

1. Рассмотрите децентрализованную модель Рамсея, в которой каждый человек облагается пропорциональным подоходным налогом (т. е. эффективная заработная плата равна  $(1 - \tau)w_t$ , где  $\tau$  – ставка налогообложения. Кроме того, государство подбирает для потребителей паушальный налог  $z_t$  так, чтобы сбалансировать бюджет в каждом периоде (величина налога может быть и отрицательной, тогда его можно трактовать как трансферт). Все собранные налоги тратятся на финансирование постоянных госрасходов  $g$  на душу населения.
  - (a) Сформулируйте задачу потребителя и задачу фирмы.
  - (b) Выпишите условия равновесия.
  - (c) Зависит ли поведение капиталовооружённости и потребления в данной модели от величины ставки налога  $\tau$ ? Не противоречит ли это тому, что подоходный налог является искажающим как пропорциональный? Объясните.
  
2. Рассмотрим централизованную модель малой открытой экономики Рамсея с постоянным населением и производственной функцией  $y = Af(k)$ , где  $f(k)$  – удовлетворяет всем свойствам неоклассической производственной функции, а  $A$  – мультипликативный технологический шок. Предположим, что экономика находится в стационарном состоянии и  $A = 1$ . В момент  $t = 0$  неожиданно происходит рост  $A$  до уровня  $A_1 > 1$ , причём известно, что этот шок временный и продлится до момента  $T > 0$ , после чего  $A$  вновь снизится до 1.
  - (a) Опишите динамику потребления, инвестиций, счёта текущих операций, начиная с момента  $t = 0$ .
  - (b) Опишите динамику потребления, инвестиций, счёта текущих операций, начиная с момента  $t = 0$ , в случае, если при  $t = T$  неожиданно обнаруживается, что  $A$  так и осталось равно  $A_1$ .
  
3. Рассмотрите централизованный вариант модели малой открытой экономики Рамсея с непрерывным временем. Подушевая производственная функция  $f(k)$  удовлетворяет стандартным условиям, население растёт с постоянным темпом  $n$  ( $0 < n < r$ ).
  - (a) Выведите уравнения, описывающие стационарные траектории модели. Как стационарное состояние зависит от темпа роста населения  $n$ ? Объясните интуитивно. Какое соотношение должно соблюдаться между нормой дисконта  $\theta$  и мировой процентной ставкой  $r$ , чтобы потребление агентов не стремилось ни к нулю, ни к бесконечности при  $t \rightarrow +\infty$ ?
  - (b) Отличается ли найденное стационарное состояние от случая с постоянным населением? Объясните интуитивно.

- (с) С помощью фазовой диаграммы опишите динамику соответствующей нелинейной системы после неожиданного увеличения мировой процентной ставки  $r$ , считая, что в начальный момент она находилась в стационарном состоянии.

### Домашнее задание 3.

Первые четыре задачи решите из учебника David, Romer. "Advanced macroeconomics." (2016):

1. Задача 2.14;
2. Задача 2.17;
3. Задача 2.18;
4. Задача 2.19;
5. Стандартная Модель Деньги-в-Полезности (Money-In-Utility) подразумевает, что предельная норма замещения между деньгами и потреблением равна  $i_{t+1}/(1 + i_{t+1})$ . Эта модель предполагает, что агенты приходят в период  $t$  с ресурсами  $w_t$  и используют их для покупки капитала, потребления, номинальных облигаций и денег. Реальная стоимость этих денежных средств даёт полезность в периоде  $t$ . Предположим теперь, что денежные средства, выбранные в периоде  $t$ , не дают никакой полезности до периода  $t + 1$ . Полезность задана как  $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, M_t/P_t)$ , а бюджетное ограничение принимает вид

$$w_t = C_t + \frac{M_{t+1}}{P_t} + \frac{B_{t+1}}{P_t} + K_{t+1}$$

и домохозяйство выбирает  $C_t$ ,  $K_{t+1}$ ,  $B_{t+1}$  и  $M_{t+1}$  в периоде  $t$ . Реальное богатство домохозяйства  $w_t$  определяется как

$$w_t = F(K_t, A_t) + (1 - \delta)K_t + \frac{(1 + i_t)B_t}{P_t} + \frac{M_t}{P_t} + T_t$$

Выведите условия первого порядка для выбора домохозяйством уровня  $M_{t+1}$  и покажите, что

$$\frac{u_m(C_t, m_t)}{u_c(C_t, m_t)} = i_t.$$

6. Предположим, что полезность репрезентативного домохозяйства зависит от потребления и от реального объёма денежных средств, доступных для покупки потребления. Пусть  $A_t/P_t$  – реальный запас денег, входящий в функцию полезности. Если игнорировать капитал, целью домохозяйства является максимизация  $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, A_t/P_t)$  при бюджетном ограничении

$$Y_t + \frac{M_{t-1}}{P_t} + T_t + \frac{(1 + i_t)B_t}{P_t} = C_t + \frac{M_t}{P_t} + \frac{B_{t+1}}{P_t}$$

где доход  $Y_t$  – экзогенный процесс. Предположим, что запас денежных средств, который даёт домохозяйству полезность, – это реальная стоимость денег после покупки облигаций, но до получения дохода или покупки потребительских благ:

$$\frac{A_t}{P_t} = \frac{M_{t-1}}{P_t} + T_t + \frac{(1 + i_t)B_t}{P_t} - \frac{B_{t+1}}{P_t}$$

- (a) Выведите условие первого порядка для  $A_t$  и  $B_{t+1}$ .
- (b) Чем эти условия отличаются от тех, что получаются в стандартной постановке модели?

7. Предположим, что функция полезности репрезентативного домохозяйства имеет вид  $u(C, m) = (1 - \gamma) \ln C + \gamma \ln m$ . Покажите, что если потребление в устойчивом состоянии постоянно, то существует единственный устойчивый запас капитала  $k^{SS}$ , для которого выполняется  $\beta^r f_k(k^{SS}) + 1 - \delta = 1$ . Объясните, почему изменения в темпе роста предложения денег не влияют на устойчивый уровень  $k$  в данном случае, но влияют, когда функция полезности имеет следующий вид:

$$u(C, m) = \frac{(C^{1-\varphi} m^\gamma)^{1-\phi}}{1-\phi}$$

где  $\phi < 1$  и  $\gamma \in (0, 1)$ .

8. Предположим, что на денежные средства начисляется номинальная ставка процента  $i^m$ . Эти платежи финансируются комбинацией единовременного налога и печати денег. Пусть  $a$  — доля, финансируемая за счёт единовременного налога. Бюджетное ограничение государства имеет вид  $\tau_t + v_t = i^m m_t$ , где  $\tau_t = a i^m m_t$  и  $v_t = \theta m_t$ . Используя модель Сидрауского, сделайте следующее:

- (a) Покажите, что отношение предельной полезности денег к предельной полезности потребления (приблизительно) равно  $r + \pi - i^m = i - i^m$ .
- (b) Покажите, как метод финансирования процентов, выплачиваемых на денежные средства, влияет на  $i - i^m$ . Объясните экономическую интуицию, стоящую за полученным результатом.

## Домашнее задание 4.

### 1. Выводы модели расширяющего разнообразия (*expanding variety model*) для государственной политики.

Рассмотрим стандартную постановку модели расширяющегося разнообразия.

- (a) Покажите, что государство может обеспечить наиболее эффективное равновесие (*first-best equilibrium*), если оно использует единовременный налог для финансирования субсидий в промежуточные продукты. Какая норма субсидирования должна быть для этого использована? *Опционально*: Почему в более обширной версии модели сложно проводить требуемую политику?
- (b) Может ли государство обеспечить наиболее эффективное равновесие, если оно опирается лишь на субсидии в исследования и разработку (финансируемые, опять же, единовременным налогом)? Обоснуйте свой ответ. *Опционально*: В какой модификации модели государству было бы важно субсидировать исследования?

### 2. Продолжительность монопольной позиции.

Рассмотрим модель расширяющегося разнообразия в стандартной постановке, в которой монополизированные промежуточные продукты становятся конкурентными с вероятностью  $p$  на момент времени.

- (a) Как изменения в  $p$  влияют на свойства устойчивого состояния этой модели?
- (b) Какие политические меры со стороны государства приведут к наиболее эффективному равновесию в этой модели? В частности, достижимо ли наиболее эффективное равновесие только лишь за счёт субсидирования закупок монополизированных промежуточных продуктов?
- (c) Если государство может влиять на  $p$  через различные инструменты (такие как антитрестовское законодательство или защита патентов), какие выводы относительно требуемых политических мер следуют из модели?

### 3. Нерезкие инновации (*Non-drastic innovations*).

Проанализируйте базовую модель Шумпетерианского роста, предполагая, что условие

$$\lambda \geq \frac{1}{1 - \beta^{\frac{1-\beta}{\beta}}}$$

не выполнено.

- (a) Покажите, что монополисты устанавливают лимитирующую цену.
- (b) Опишите равновесный темп роста на траектории сбалансированного развития.

- (c) Опишите Парето-оптимальное распределение и сравните его с равновесным.
- (d) Теперь рассмотрим гипотетическую экономику, в которой производитель наиболее качественной продукции прошлого периода исчезает, так что монополист может требовать маржу в размере  $1/(1 - \beta)$  вместо лимитирующей цены. Покажите, что темп роста на траектории сбалансированного развития в этой гипотетической экономике строго выше, чем темп роста, описанный в пункте b. Объясните результат.

4. *Модель Шумпетерианского роста без эффекта масштаба.*

Предположим, что население растёт экспоненциально с постоянным темпом  $n$ . Модифицируйте базовую модель Шумпетерианского роста так, чтобы эффект масштаба отсутствовал и экономика росла с постоянным темпом (с положительным ростом дохода на душу населения). [Подсказка: предположите, что одна единица конечного товара, потраченная на исследования и разработку для улучшения оборудования качества  $q$ , приводит к потоку инноваций с темпом, равным  $v/q^\varphi$ , где  $\varphi > 1$ .]



## Макроэкономика 4

### Задания для промежуточной аттестации

Общий вес работы: 70 баллов.

1. (15 баллов) Модель дерева Лукаса (Lucas tree model) с опционами.

Рассмотрим модель экономики с репрезентативным агентом, в которой случайное количество скоропортящегося (perishable) продукта  $y_t$  <падает> с фруктового дерева в каждый период времени  $t$ . <Падение> продукта описывается последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин (i.i.d.) с двумя возможными состояниями в каждый момент времени:  $y_t \in \{y_H, y_L\}$ ,  $y_H > y_L > 0$  с распределением вероятности:

$$P(y_t = y_H) = \pi, P(y_t = y_L) = 1 - \pi, \pi \in (0, 1)$$

Агент максимизирует ожидаемую полезность на бесконечном горизонте планирования:

$$E_t \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} \log(c_s), \text{ где } \beta \in (0, 1).$$

Предположим, что существует конкурентный фондовый рынок, на котором люди могут торговать акциями, обеспечивающими владение долей фруктового дерева. Цена акции в состоянии мира  $i \in \{H, L\}$  равна  $p_i$ . Эта цена является экс-дивидендной: если агент покупает акцию в периоде  $t$ , то он получает свой первый дивиденд в периоде  $t+1$ . Помимо акций, агенты могут торговать безрисковыми облигациями (risk-free real bonds) и опционами колл и пут с ценой исполнения  $\bar{p} = \frac{p_H + p_L}{2}$  (совокупное предложение этих активов равно 0). Колл-опцион дает право купить акцию по цене исполнения  $\bar{p}$  в следующем периоде, т.е. выплачивает  $\max\{0, p_i - \bar{p}\}$  в следующем периоде. Пут-опцион дает право продать акцию по цене исполнения  $\bar{p}$  в следующем периоде, т.е. выплачивает  $\max\{0, \bar{p} - p_i\}$  в следующем периоде.

- (3 балла) Запишите оптимизационную задачу репрезентативного агента.
- (4 балла) Выведите систему уравнений, задающую равновесное распределение средств (allocations) и цены акций ( $p_t$ ), облигаций ( $R_t^{-1}$ ), колл-опционов ( $co_t$ ) и пут-опционов ( $po_t$ ) в данной экономике. Проинтерпретируйте полученные уравнения.
- (4 балла) Вычислите равновесные цены акций, безрисковых облигаций, колл-опционов и пут-опционов как функции от  $\pi$ ,  $\beta$ ,  $y_H$  и  $y_L$ .
- (4 балла) Покажите что в данной модели выполняется паритет опционов пут и колл (put-call parity):

$$p_i + po_i - \beta y_i = \bar{p} R_i^{-1} + co_i, \quad i \in \{H, L\}$$

где  $\beta u_i$  – это чистая приведенная ожидаемая стоимость дивидендов следующего периода. Объясните полученный результат.

2. (15 баллов) *q-теория инвестиций.*

Вспомним версию  $q$ -теории инвестиций с непрерывным временем, выпуклыми внутренними издержками регулирования (internal adjustment costs) и без неопределенности. Для простоты предположим, что валовая прибыль репрезентативной фирмы на единицу капитала  $\pi(K)$  линейна по капиталу, а внутренние издержки регулирования  $C(I)$  квадратичны. Предположим также, что цена инвестиционных товаров постоянна и равна  $p_K$ . Репрезентативная фирма максимизирует свою чистую дисконтированную прибыль:

$$\int_{t=t}^{\infty} e^{-r(\tau-t)} [\pi(K(\tau))k(\tau) - p_K I(\tau) - C(I(\tau))] d\tau$$

при ограничении  $\dot{k} = I$ .

- (a) (5 баллов) Запишите условия оптимума, описывающие равновесие в данной модели. Проинтерпретируйте их.
- (b) (5 баллов) Предположим, что изначально экономика находится в стационарном состоянии. Как непредвиденное перманентное снижение цен инвестиционных товаров  $p_K$  повлияет на траектории капитала, инвестиций и  $q$ ? Используйте подходящие графики для иллюстрации ответа. Свой ответ обоснуйте.
- (c) (5 баллов) Предположим, что изначально экономика находится в стационарном состоянии. В периоде  $t$  становится известно, что начиная с периода  $T > t$  государство снизит импортные тарифы на инвестиционные товары, что вызовет перманентное снижение их цены  $p_K$  с периода  $T$ . В чем выразится эффект данной политики на траекторию капитала, инвестиций и  $q$ ? Используйте подходящие графики для иллюстрации ответа. Свой ответ обоснуйте.

3. (20 баллов) *Структура процентных ставок по срочности и потребление.*

Рассмотрим экономику, населенную большим числом идентичных домохозяйств. Репрезентативное домохозяйство максимизирует ожидаемую полезность на протяжении всей жизни:

$$E_0 \int_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

где  $\beta \in (0, 1)$  и  $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ .

Каждое домохозяйство владеет деревом, т.е. количество домохозяйств и деревьев совпадает. Величина потребления благ, растущих на дереве, удовлетворяет условию  $c_{t+1} = c^* c_t^\phi E_{t+1}$ , где  $\phi \in (0, 1)$ , а  $E_t$  – последовательность независимых одинаково распределенных (i.i.d.) лог-нормальных случайных величин:  $\log(e_t) \sim N(0, \sigma^2)$ . Предположим, что в дополнение к акциям, обеспечивающим владение деревьями, в экономике происходит торговля однопериодными и двухпериодными безрисковыми облигациями.

- (a) (4 балла) Задайте конкурентное равновесие. Выведите систему уравнений, описывающих равновесие.
- (b) (4 балла) Вычислите структуру процентных ставок по срочности (term structure)  $\tilde{R}_{jt}$  для  $j = 1, 2$ .
- (c) (4 балла) Экономист А утверждает: «Экономическая теория предсказывает, что дисперсия логарифма краткосрочной процентной ставки всегда ниже, чем дисперсия логарифма долгосрочной процентной ставки, потому что краткосрочные ставки рискованней». Согласны ли Вы с этим утверждением? Свой ответ обоснуйте.
- (d) (4 балла) Экономист В утверждает: «Краткосрочные процентные ставки более чувствительны к состоянию экономики, т.е.  $c_t$ , чем долгосрочные процентные ставки». Согласны ли Вы с этим утверждением? Свой ответ обоснуйте.
- (e) (4 балла) Экономист С заявляет: «В экономиках с крайне устойчивым (persistent) потреблением, т.е.  $\phi \approx 1$ , изменения в уровне потребления не влияют на процентные ставки». Согласны ли Вы с этим утверждением? Свой ответ обоснуйте и приведите экономическую интуицию.

4. (20 баллов) *Истина или ложь.*

Выберите, какие утверждения являются истинными, ложными или частично истинными, и объясните. Оценка за это задание будет основана на качестве ваших объяснений. Если утверждение ложно, приведите контрпример.

- (a) (2.5 балла) Пусть  $x$  – диффузионный процесс (diffusion process),  $dx = axdt + \sigma xdz$ , где  $dz$  – приращение в Винеровском (Wiener) процессе, а  $y = \log(x)$ . Тогда  $dy = adt + \sigma dz$ .
- (b) (2.5 балла) Модель с ограничениями ликвидности (liquidity constraints) не может объяснить, почему потребление обычно снижается в ответ на ожидаемое снижение дохода.
- (c) (2.5 балла) Среднее  $q$  никогда не может быть больше предельного  $q$ .
- (d) (2.5 балла) ССАРМ предсказывает, что рискованные активы, чьи доходности не коррелируют с потреблением, должны иметь ту же самую ожидаемую доходность, что и безрисковые активы.
- (e) (2.5 балла) В моделях с ломаными (kinked) капитальными издержками регулирования изменение капитала происходит с разрывами, но постепенно.
- (f) (2.5 балла) Если сегодня государство анонсирует снижение налога на доходы в следующем году, тогда потребление в следующем году не изменится. Значит, снижение налогов – неэффективный инструмент стимулирования экономики.
- (g) (2.5 балла) Загадка премии за риск вложений в акции (equity premium puzzle) – это явление, описывающее аномально высокую волатильность доходностей акций.

- (h) (2.5 балла) В моделях с невозвратными (irreversible) инвестициями увеличение вероятности положительной будущей доходности капитала, [увеличение вероятности] которое не влияет ни на ожидаемую доходность капитала, ни на неопределенность, связанную с негативными шоками, не затрагивает объем инвестиций.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Мидтерм.

Общий вес работы: 30 баллов.

1. (10 баллов) *Теория постоянного дохода (Permanent income hypothesis).*

Рассмотрим потребителя с бесконечным горизонтом планирования, квадратичными предпочтениями и субъективным временным фактором дисконтирования  $\beta \in (0, 1)$ . Агент может свободно брать и давать в долг деньги по рыночной процентной ставке  $r > 0$ . Предположим, что  $\beta(1 + r) = 1$ . Доход потребителя в текущем периоде  $y_t$  описывается следующим нестационарным стохастическим процессом:

$$y_t = y_{t-1} + E_t - \theta E_{t-1}$$

где  $E_t$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (i.i.d.),  $E(E_t) = 0$ ,  $V(E_t) = \sigma^2$ , а  $\theta$  — константа,  $\theta \in (0, 1)$ .

Обозначим чистые активы потребителя в начале периода  $t$  через  $A_t$ .

- (a) (3 балла) Найдите оптимальное потребление в периоде  $t$  для заданных значений  $\theta$ ,  $A_t$ ,  $y_t$  и  $E_t$ .
- (b) (3 балла) Вычислите  $\Delta c_t = c_t - c_{t-1}$  как функцию от  $E_t$ . Связано ли изменение в уровне потребления с ожидаемыми изменениями в доходе? Почему? Вычислите предельную склонность к потреблению (marginal propensity to consume — mpc). Объясните полученный результат.
- (c) (4 балла) Предположим, что в периоде  $t$  потребитель узнал, что начиная с периода  $t + 2$  его доход будет с точностью известен и равен  $y_{t+2}$ , т.е.  $y_{t+j} = y_{t+2}$ ,  $\forall j \geq 2$ . Как изменится потребление в периоде  $t$ ? А в периоде  $t + 2$ ? Вычислите эти изменения и объясните полученный результат.

2. (10 баллов) *Сильные привычки.*

Рассмотрим потребителя с горизонтом планирования в 2 периода:  $t_1$  — период молодости,  $t_2$  — период старости. В каждом периоде агент получает 2 долл. дохода ( $y_1 = y_2 = 2$ ) и потребляет два блага: шоколадки Mars и Snickers. Предположим, что у потребителя есть сильные привычки (deep habits): полезность от потребления во втором периоде зависит от потребления Mars в первом периоде. Так, предпочтения имеют вид:

$$\log m_t^{\frac{1}{2}} + \log (m_t - \alpha m_{t-1})^{\frac{1}{2}} s_t^{\frac{1}{2}}$$

где  $m_t$  и  $s_t$  обозначают потребление Mars и Snickers в периодах  $t = 1, 2$  соответственно. Для простоты предположим, что цены благ равны 1 в обоих периодах, агент может сберегать или брать в долг по нулевой процентной ставке и в начале первого периода не обладает активами.

- (a) (2 балла) Для начала предположим, что привычки не влияют на полезность, т.е.  $\alpha = 0$ . Найдите профиль потребления на протяжении жизни агента:  $m_1, s_1, m_2, s_2$ .
- (b) (4 балла) Теперь предположим, что  $0 < \alpha < 1$  и сильные привычки являются *внутренними (internal)*, т.е. полезность агента во втором периоде зависит от его собственного потребления Mars в первом периоде  $m_1$ . Найдите профиль потребления агента на протяжении всей жизни в данной постановке модели:  $m_1, s_1, m_2, s_2$ . Как изменяется со временем потребление Snickers и Mars? Сравните со случаем без сильных привычек и приведите экономическую интуицию.
- (c) (4 балла) Предположим теперь, что  $0 < \alpha < 1$  и сильные привычки являются *внешними (external)*, т.е. полезность агента во втором периоде зависит от совокупного потребления Mars в первом периоде  $M_1$  (однако  $m_1 = M_1$  в состоянии равновесия). Найдите профиль потребления агента на протяжении всей жизни в данной постановке модели:  $m_1, s_1, m_2, s_2$ . Как изменяется со временем потребление Snickers и Mars? Сравните с результатами предыдущих пунктов и приведите экономическую интуицию.

3. (10 баллов) *Истина или ложь.*

Определите, являются ли следующие утверждения истинными, ложными или частично истинными. В данной задаче оценивается качество приведенных объяснений.

- (a) (2 балла) Поведение, эквивалентное случаю полной уверенности (certainty equivalence behavior), не может наблюдаться в модели с отвращением потребителей к риску (risk-averse consumers).
- (b) (2 балла) Повышенная чувствительность (excess sensitivity) потребления – это наблюдение того, что потребление реагирует на неожиданные транзитные доходы (transitory unexpected changes in income).
- (c) (2 балла) В модели с осмотрительностью агентов (prudence motive) из более высокой волатильности потребления следует больший размер предусмотрительных (precautionary) сбережений.
- (d) (2 балла) Согласно теории постоянного дохода, потребление товаров длительного пользования (durable goods) описывается случайным блужданием (random walk process).
- (e) (2 балла) Увеличение процентной ставки приводит к уменьшению текущего потребления и увеличению будущего потребления.

## Макроэкономика 5

### Задания для промежуточной аттестации

Общий вес: 80 баллов.

#### 1. (18 баллов)

Рассмотрим следующую модель реального бизнес-цикла. В закрытой экономике живёт репрезентативное домохозяйство, чья функция полезности имеет вид

$$U(C_t, L_t) = \ln C_t + \varphi \ln L_t$$

где  $C_t$  и  $L_t$  – это потребление и досуг в момент времени  $t$  соответственно. Репрезентативное домохозяйство максимизирует его ожидаемую дисконтированную полезность:

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i U(C_{t+i}, L_{t+i})$$

Экономика производит единственный гомогенный продукт, который может быть потреблён или использован как капитальное благо. Технология задаётся производственной функцией Кобба-Дугласа:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

где  $K_t$  и  $N_t$  – это используемый капитал и труд соответственно, а  $A_t$  – случайный параметр продуктивности. Капитал амортизируется с темпом  $\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ). Продуктивность может принимать только два значения, высокое или низкое,  $\bar{A} > \underline{A}$ . Эволюция продуктивности  $A_t$  описывается следующими переходными вероятностями:

$$\Pr(A_{t+1} = \bar{A} | A_t = \bar{A}) = \Pr(A_{t+1} = \underline{A} | A_t = \underline{A}) = p$$

$$\Pr(A_{t+1} = \bar{A} | A_t = \underline{A}) = \Pr(A_{t+1} = \underline{A} | A_t = \bar{A}) = 1 - p$$

где  $1/2 \leq p \leq 1$ .

1.

В каждом периоде каждое домохозяйство наделено одной единицей времени, которая может быть потрачена либо на труд, либо на досуг. Выпуск производится совершенно конкурентными фирмами, которые нанимают рабочих по рыночной заработной плате  $w_t$  и арендуют капитал у домохозяйств по рыночной ренте  $r_t$ . Цены обоих факторов производства определяются в равновесии эндогенно. Рынки факторов тоже являются совершенно конкурентными.

- (а) (2 балла) Выпишите оптимизационную задачу репрезентативного домохозяйства и репрезентативной фирмы.

- (b) (2 балла) Запишите условия очищения рынка.
- (c) (1 балл) Покажите, что в этой модели рыночное равновесие достигается в Парето-оптимальном распределении. При ответе будьте внимательны к деталям.
- (d) (2 балла) Выпишите оптимизационную задачу общественного планировщика.
- (e) (1 балл) Покажите, что состояние мира в экономике в момент  $t$  полностью описывается реализовавшимся значением  $A_t$  и объёмом капитала  $K_t$ , инвестированного в производство в конце периода  $t - 1$ .
- (f) (4 балла) Выведите условия первого порядка для оптимизационной задачи общественного планировщика.
- (g) (4 балла) Рассмотрите два "полярных" случая: (i)  $\rho = 1/2$  и (ii)  $\rho$  близко к 1. Как циклическое поведение потребления, инвестиций, занятости и реальной заработной платы различается между этими "полярными" случаями? Завершите, прокомментировав зависимость между устойчивостью шоков продуктивности и циклическими свойствами четырёх указанных макроэкономических переменных. (Указание: От вас не ждут детального решения. Чёткой интуиции достаточно.)
- (h) (2 балла) Прокомментируйте тот факт, что эта модель ничего не говорит о циклических свойствах безработицы. Какие элементы этой модели, по вашему мнению, ответственны за это? Как бы вы изменили предположения модели, чтобы сделать её более информативной в плане описания циклического поведения безработицы?

2. (12 баллов) *Реальные денежные эффекты.*

Каковы выводы следующих моделей относительно влияния монетарной политики на выпуск и почему? Рассмотрите как *ожидаемые*, так и *неожиданные* изменения в монетарной политике. При ответе обратите внимание к деталям. Оценка за задание будет основываться на качестве ваших рассуждений.

- (a) (2 балла) Модель реального бизнес-цикла.
- (b) (2 балла) Модель Лукаса с неполной информацией.
- (c) (2 балла) Модель Фишера с предопределёнными ценами.
- (d) (2 балла) Модель Тейлора с фиксированными ценами.
- (e) (2 балла) Модель Кальво с фиксированными ценами.
- (f) (2 балла) Модель Каплина-Спулбера (Caplin-Spulber).

3. (13 баллов) *Шок предпочтений в базовой Новой Кейнсианской модели.*

Предположим, что полезность репрезентативного агента имеет вид

$$\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\xi_t N_t^{1+\eta}}{1+\eta}$$



Производственная функция задана как  $Y_t(i) = Z_t N_t(i)$ .  $C$  обозначает потребление,  $\xi$  – стохастический шок предпочтений,  $N$  – время, потраченное на труд,  $Y$  – выпуск,  $Z$  – агрегированные колебания продуктивности, а  $\sigma$  и  $\eta$  – это константы. Среднее случайной переменной  $\xi$  равно 1.

- (a) (3 балла) Выведите условия первого порядка для решения домохозяйства о предложении труда. Покажите, как предложение труда зависит от шока предпочтений, и объясните, как положительная реализация  $\xi$  повлияет на предложение труда.
- (b) (4 балла) Выведите уравнение для равновесного при гибких ценах выпуска  $\hat{y}_t^f$  в этой экономике.
- (c) (3 балла) Влияет ли шок предпочтений на равновесие при гибких ценах? Если да, то объясните, как и почему.
- (d) (3 балла) Уравнение Эйлера для задачи оптимального выбора домохозяйством уровня потребления может быть записано в виде

$$y_t = E_t y_{t+1} - \frac{1}{\sigma} (i_t - E_t \pi_{t+1} - r_t)$$

Как  $r^n$  зависит от поведения равновесного при гибких ценах уровня выпуска? Зависит ли  $r^n$  от шока предпочтений  $\xi$ ? Интуитивно объясните, как положительная реализация  $\xi$  влияет на равновесный при гибких ценах уровень реальной процентной ставки: повышает, понижает или оставляет неизменным?

4. (18 баллов) Экономика поиска (search economy) с фиксированными заработными платами.

В экономике с единственным благом проживает единичный континуум нейтральных к риску работников. Если работник является занятым, то он может производить  $y_t$  единиц блага в период  $t$  и получает  $w_t$  в виде заработной платы. Если работник является безработным, то он получает полезность  $b$  от вне рыночной деятельности. Продуктивность  $y_t$  одинакова среди работников.

Безработный работник участвует в процессе поиска работы, описываемом функцией соответствия  $M(u_t, v_t)$ . При заданном числе безработных  $u_t$  и открытых в текущий момент вакансий  $v_t$  число новых рабочих мест, создаваемых в момент  $t$ , равно

$$M(u_t, v_t) = B u_t^\gamma v_t^{1-\gamma}$$

где  $B > 0$  и  $0 < \gamma < 1$ . Отсутствуют барьеры для входа на рынок и выхода из него. Каждая фирма может нанять лишь одного работника. Открытие и поддержание вакансии связано с издержками для фирмы в размере  $k$  единиц блага в период. Работники не терпят издержек от поиска работы и производственной деятельности. Каждая вакансия может быть уничтожена в каждом периоде из-за экзогенных факторов с вероятностью  $\sigma$ .

- (a) (1 балл) Определим *тесноту рынка труда* как  $\theta = \frac{y}{u}$ . Какова вероятность  $p(\theta_t)$  того, что безработный работник найдёт работу в данном периоде, как функция от  $\theta_t$ ? Какова вероятность  $q(\theta_t)$  того, что фирма заполнит вакансию в данный период, как функция от  $\theta_t$ ? Как  $p(\theta_t)$  и  $q(\theta_t)$  зависят от  $\theta_t$ ? Интерпретируйте.
- (b) (1 балл) Выведите уравнение, описывающее эволюцию безработицы  $u_t$ .

В вопросах (c)-(g) предполагайте, что  $y_t = y = \text{const}$  и рассматривайте только решения в *устойчивом состоянии (steady-state)*. Обозначим за  $W$  и  $U$  ожидаемые дисконтированные потоки полезности работнику, когда он занятый и безработный соответственно, а за  $J$  и  $V$  — ожидаемые дисконтированные прибыли фирмы с закрытой и открытой вакансией соответственно. Предположим, что уровень заработной платы  $w$  задан экзогенно.

- (c) (2 балла) Запишите два отдельных уравнения Беллмана для фирмы с закрытой вакансией и с открытой вакансией, то есть для  $J$  и  $V$  соответственно.
- (d) (2 балла) Запишите два отдельных уравнения Беллмана для занятого и безработного работников, то есть  $W$  и  $U$  соответственно.
- (e) (5 баллов) Решите модель, то есть найдите неизвестные значения числа занятых и безработных работников, фирм с закрытыми и открытыми вакансиями, значения функций  $J$ ,  $V$ ,  $W$  и  $U$  при заданных  $y$ ,  $w$  и других экзогенных параметрах модели.
- (f) (2 балла) Предположим, что изначально экономика находится в равновесии, а затем  $y$  перманентно падает. Как на это отреагируют безработица, вакансии и теснота рынка труда?
- (g) (3 балла) Сравните реакцию безработицы в пункте (f) с ситуацией, когда заработная плата задана как переговорное равновесие Нэша (Nash bargaining solution). В каком из этих двух случаев реакция безработицы на падение  $y$  сильнее? Почему? Объясните.
- (h) (2 балла) Как предположение о том, что  $w_t$  остаётся на фиксированном уровне при сдвиге  $y_t$  может быть рационализировано? Каковы *допустимые*, в каком-то смысле, границы значений  $w_t$ ?
5. (19 баллов) *Новостные шоки в модели Кийотаки-Мура (Kiyotaki-Moore)*.

Рассмотрим модель Кийотаки-Мура. В экономике есть два типа нейтральных к риску агентов, продуктивные и непродуктивные. Размер населения продуктивных агентов равен  $\eta$ , а непродуктивных равен  $1 - \eta$ . Капитал является единственным фактором производства. Совокупный объём капитала зафиксирован,  $K = \bar{K}$ .

Продуктивные агенты имеют доступ к технологии с постоянной отдачей от масштаба, которая при использовании одной единицы капитала производит  $s > 0$  единиц неторгуемого выпуска и  $a > 0$  единиц торгуемого выпуска:

$$y_t = ak_{t-1} + ck_{t-1}$$

Торгуемый выпуск можно либо обменять на капитал, либо потратить. Неторгуемый выпуск может лишь потребляться. Коэффициент дисконтирования продуктивных агентов равен  $0 < \beta < 1$ .

Непродуктивные агенты имеют доступ к технологии с убывающей отдачей от масштаба. Производственная функция возрастает по капиталу и является вогнутой:

$$\bar{y}_t = F(\tilde{k}_{t-1}), \quad F^f(\cdot) > 0, \quad F^{ff}(\cdot) < 0$$

Коэффициент дисконтирования непродуктивных агентов равен  $b$ ,  $\beta < b < 1$ . То есть непродуктивные агенты более терпеливы, чем продуктивные. Кроме этого, мы предполагаем, что они не сталкиваются с какими-либо барьерами на заёмные средства (технически это значит, что они могут иметь отрицательное потребление). Поэтому в равновесии при разумной калибровке модели непродуктивные агенты дают в долг продуктивным. Продуктивные агенты, в свою очередь, сталкиваются с ограничением, согласно которому номинальный объём долга  $b_t$ , выданного непродуктивному агенту в момент  $t$ , с учётом процентов не может превышать рыночную стоимость капитала  $k_t$  в руках этого агента в момент  $t + 1$ , когда этот долг и проценты должны быть выплачены:

$$Rb_t \leq q_{t+1}k_t$$

где  $R$  — это валовая безрисковая процентная ставка, а  $q_{t+1}$  — рыночная стоимость одной единицы капитала в момент  $t + 1$ . В модели отсутствует неопределённость. Будущая траектория  $q_t$  полностью предсказуема.

- (a) (1 балл) Объясните, почему равновесная процентная ставка определяется коэффициентом дисконтирования непродуктивных агентов:

$$R = \frac{1}{b}$$

- (b) (1 балл) Предположим, что первоначально большая часть существующего капитала сконцентрирована в руках непродуктивных агентов. Объясните, почему до определённого момента продуктивные агенты будут потреблять лишь неторгуемый выпуск, а торгуемый будут полностью использовать в целях накопления богатства.
- (c) (1 балл) Объясните, почему объём капитала  $k_t$  в руках продуктивных агентов эволюционирует в соответствии с

$$k_t = \frac{1}{q_t - \frac{1}{R}q_{t+1}} [(a + q_t)k_{t-1} - Rb_{t-1}]$$

- (d) (1 балл) Объясните, почему объём капитала  $\tilde{k}_t$  в руках непродуктивных агентов определяется следующим уравнением

$$q_t - \frac{1}{R}q_{t+1} = \frac{1}{R}F^f(\tilde{k}_t)$$

Используйте условие очищения рынка капитала

$$\eta k_t + (1 - \eta)\tilde{k}_t = \bar{K}$$

чтобы устранить  $\tilde{k}_t$  из формулы выше. Зададим

$$M(k_t) \equiv \frac{1}{R} F^f \frac{\bar{K} - \eta k_t}{1 - \eta}$$

Покажите, что  $M$  возрастает по  $k_t$ .

(e) (1 балл) Покажите, что

$$q_t = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{R^s} M(k_{t+s})$$

- (f) (2 балла) Найдите устойчивые значения  $q^*$ ,  $k^*$  и  $b^*$  переменных  $q_t$ ,  $k_t$  и  $b_t$  соответственно.
- (g) (9 баллов) Предположим, что в момент  $t = -1$  экономика находится в устойчивом состоянии, найденном вами в пункте f. В момент  $t = 0$  все агенты неожиданно узнают, что продуктивность продуктивных агентов в периоде  $t = T$  временно понизится с уровня  $a$  до  $(1 - \Delta)a$ ,  $0 < \Delta < 1$ , и потом, начиная с момента  $t = T + \tau + 1$ , вернётся на свой прежний уровень  $a$ . Предположим, что  $\Delta$  достаточно мала. Лог-линеаризируйте модель в окрестности устойчивого состояния, что вы нашли в пункте f. Решите лог-линеаризированную модель, чтобы найти траектории  $q_t$ ,  $k_t$  и  $b_t$ .
- (h) (3 балла) Могут ли новости о будущей продуктивности, которые необязательно воплотятся в жизнь, произвести долговременный эффект на реальную экономическую активность? Как размер эффекта зависит от  $T$  и  $\tau$ ? Объясните интуитивно.

## Математика для экономистов 1

### Задания для промежуточной аттестации

Общий вес: 60 баллов.

1. Рассматривается параметрическая оптимизационная задача:

$$\max x_1 + 2x_2 \quad \text{s.t.} \quad px_1 + x_2 \leq 1, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$$

где  $p \in \mathbb{R}_{++}$  - параметр.

- (а) (10 баллов) Используйте теорему Куна-Таккера, чтобы решить задачу. В частности, найдите множество оптимальных точек,  $x^*(p)$ , и значений функции,  $f^*(p)$ , где  $f(x_1, x_2) \equiv x_1 + 2x_2$  - целевая функция.
- (б) (7 баллов) Подтвердите выводы Теоремы о Максимуме на этом примере.
- (с) (8 баллов) Пусть  $p \equiv p(t)$  - функция от  $t \geq 0$  (на пример,  $t$  может обозначать время). Также, предположим, что в точке  $t = 1$  у функции  $p(t)$  происходит скачок вверх. А именно, пусть  $0 < p(0) < p(1)$ , и

$$p(t) = \begin{cases} p(0) & \text{для } 0 \leq t < 1 \\ p(1) & \text{для } 1 \leq t. \end{cases}$$

Пусть  $B(t) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : p(t)x_1 + x_2 \leq 1\}$  для каждого  $t \geq 0$ . Определите, является ли многозначное отображение  $t \rightarrow B(t)$  полунепрерывным сверху или снизу в точке  $t = 1$ . Объясните свой ответ.

2. (7 баллов) Приведите пример двух строго возрастающих функций полезности  $u$  и  $v$  на  $\mathbb{R}_+^2$  таких, что обе функции описывают одни и те же предпочтения, но только  $u$  является вогнутой (выпуклой вверх). Объясните свой ответ.
3. (10 баллов) Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - дифференцируемая квазивогнутая функция. Допустим, для некоторых  $x, y \in \mathbb{R}^n$  выполняется

$$Df(x) = 0 \quad \text{и} \quad Df(x)(y - x) \leq 0.$$

Докажите, что  $f(x) \geq f(y)$ .

4. Пусть  $S$  и  $\Theta$  - подмножества  $\mathbb{R}$ .

- (а) (5 баллов) Для функции  $\pi: S \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  дайте определение строгой супермодулярности.

Для оставшихся вопросов  $S = \Theta = \{1, 2\}$ .

- (b) (5 баллов) Пусть  $\pi(x, \theta) = w(x) - \frac{x^2}{2}$  для всех  $(x, \theta) \in S \times \Theta$ , где  $w: S \rightarrow \mathbb{R}$  - произвольная функция. Покажите, что  $\pi$  - строго супермодулярна на  $S \times \Theta$ . (Для ответа не обязательно использовать определение из пункта (a).)
- (c) (8 баллов) Сформулируйте набор условий для функции  $w$  (как можно более просто), описывающих следующие два свойства:
- $x^*(\theta) := \operatorname{argmax}_{x \in S} \pi(x, \theta)$  однозначно определено для всех  $\theta \in \Theta$ ;
  - $x^*(1) = x^*(2)$ .

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Мидтерм.

Общий вес: 40 баллов.

1. Рассматривается оптимизационная задача:

$$\max x - y^2 \quad \text{s.t.} \quad 1 + x^2 \leq y^2 \leq 2x^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$$

- (a) (2 балла) Одно из двух ограничений точно является связывающим. Найдите его и объясните свой ответ.
- (b) (10 баллов) Допустим, что оставшееся ограничение точно несвязывающее. Найдите на области допустимых значений точку  $(x^*, y^*)$  такую, что условия первого порядка (КТ-1) и (КТ-2) выполняются для некоторых множителей. Также покажите, что  $(x^*, y^*)$  - единственная такая точка.
- (c) (8 баллов) Приведите доказательства того, что  $(x^*, y^*)$  - решение оптимизационной задачи.  
(Подсказка. Решение в части (b) - лишь частный случай. Вы также должны показать ограниченность области допустимых значений.)

2. (10 баллов) Функции  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g_1, \dots, g_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - дифференцируемы, а множество  $D := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \geq 0 \text{ для } i = 1, \dots, k\}$  - выпукло.  $x^* \in D$

критическая точка задачи

$$\max f(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in D$$

Другими словами,  $x^*$  и  $k$  чисел  $\lambda^1, \dots, \lambda^k$  удовлетворяют (КТ-1) и (КТ-2).

Подтвердите или опровергните:  $Df(x^*)(y - x^*) \leq 0$  для любого  $y \in D$ .

3. (10 баллов) Подтвердите или опровергните: функция  $-x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$  строго вогнутая на  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

(Подсказка. Для любых  $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ , выполняется  $-z_1^2 - z_2^2 + z_1z_2 \leq 0$ )

## Математика для экономистов 2

### Задания для промежуточной аттестации

Общая сумма баллов: 200

1. (60 баллов) Предположим, что фирма  $F$  уплачивает дивиденды по ставке, следующей стохастическому процессу:

$$d_{t+1} = \lambda(z_{t+1})d_t,$$

где  $\lambda$  есть заранее заданная функция от состояния  $z_t$  марковского процесса.  $F$  – единственная фирма в экономике. Также имеется множество одинаковых агентов, которым принадлежат акции данной фирмы. Агенты не работают и не имеют других источников дохода, поэтому их потребление финансируется исключительно выплатами с финансового рынка. Каждый агент максимизирует  $E_0[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)]$ , где  $c_t$  есть потребление в период  $t$ . Функция полезности имеет вид  $u(c) = c^{1-\gamma} / (1-\gamma)$ .

(a) (5 баллов) Выпишите задачу оптимизации для одного агента.

(b) (30 баллов) Пусть  $z_t \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix},$$

$\beta = 4/5$ ,  $\gamma = 2$ . При самых благоприятных (для вас) предположениях относительно цен получите численно отношение цен к дивидендам как функцию от состояния марковского процесса.

(c) (25 баллов) Предположите, что финансовый рынок также котирует цену следующего дериватива: в следующий период по нему выплачивается 2 если  $p_{t+1} \leq 3$ ,  $5 - p_{t+1}$  если  $3 \leq p_{t+1} \leq 5$ , и 0 иначе (где  $p_{t+1}$  – цена

в

следующем периоде, после уплаты дивидендов). Также предположите, что в момент времени  $t-1$  по одной акции были уплачены дивиденды в размере двух. Используя предположения из пункта (b) вычислите цену описанного дериватива как функцию от сегодняшнего состояния.

2. (40 баллов) В далеком королевстве принцесса собирается выйти замуж. Имеется  $N$  кандидатов, намеревающихся жениться на ней, и они прибывают строго по одному в день. В каждый день  $t$  принцесса узнает качество  $x_t$  кандидата, прибывшего в этот день, и имеет четыре варианта действий:

- она может сразу выйти за вновь прибывшего кандидата,
- она может принять предложение текущего кандидата (при этом отказываясь от предыдущего предложения, если таковое было принято),



- она может забыть о текущем кандидате и выйти замуж за того, чье предложение она приняла ранее,
- она может перейти к следующему периоду.

Естественно, принцесса не может быть помолвлена с более чем одним кандидатом в любой момент времени. Качество каждого кандидата есть случайная величина, принимающая три значения  $0 < b < a < g$  с вероятностями  $\pi_b$ ,  $\pi_a$  и  $\pi_g$  соответственно. Случайные величины качества кандидатов независимы и одинаково распределены во все моменты времени.

Если принцесса выходит за кандидата качества  $x$  в момент времени  $t$ , то в этот момент времени она получает полезность в размере  $x$  и игра заканчивается. До (или после) момента женитьбы она получает нулевую полезность (и так же ее полезность равна нулю, если она никогда не женится). В любой момент времени принцесса оценивает свою полезность как дисконтированную ожидаемую полезность с коэффициентом дисконтирования  $\beta$ .

- (a) (10 баллов) Запишите задачу в рекурсивном виде (уравнение Беллмана). Будьте внимательны и учтите все детали в процессе определения вашей функции Беллмана – неточности и опущения будут штрафовать.
- (b) (30 баллов) Теперь предположим, что  $x_t$  может принимать значение 1 с вероятностью 40%, 5 с вероятностью 40% и 10 с вероятностью 20%, а  $\beta = 0.75$ . Найдите оптимальную стратегию принцессы.
3. (50 баллов) Предположим что два игрока встречаются в моменты времени  $t = 0, 1, 2, \dots$  и играют в игру, где каждый игрок имеет два хода,  $A$  и  $B$ . Каждый период Игрок 2 получает выплаты согласно следующей матрице  $g$ :

		Игрок 2	
		A	B
Игрок 1	A	8	10
	B	0	2

где строки представляют действия выбранные первым игроком, а колонки представляют действия выбранные вторым игроком. Пусть  $a_t^k$  будет действием игрока  $k$  в момент времени  $t$ .

Теперь предположим, что первый игрок выбирает следующую стратегию:

- (a) В пероде  $t = 0$  он играет  $A$ .
- (b) В каждый следующий период  $t$  он играет:
- $A$  с вероятностью 0.5 и  $B$  с вероятностью 0.5, если  $a_{t-1}^1 = A$  и  $a_{t-1}^2 = B$ ;
  - $A$  иначе.

Второй игрок максимизирует  $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t g(a^1, a^2)$ .

Ваше задание: найти максимальное значение целевой функции второго игрока и одну возможную стратегию, которая приносила бы это максимальное значение для всех  $\beta \in (0, 1)$ .

4. (50 баллов) Рассмотрим задачу с потреблением и сбережениями:

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}, \{s_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (c_t - \frac{1}{2}c_{t+1}) \\ & \text{s. t. } c_t + s_t = y + \frac{1}{\beta} s_{t-1}, \end{aligned}$$

предполагая подходящее ограничение на бесконечности,

где  $\beta = 0.8$  – коэффициент дисконтирования,  $s_{-1}$  – дано.

Случайный процесс дохода  $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$  имеет следующий вид:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + E_t$$

где  $\alpha_1 = 1/2$  и  $\alpha_2 = 1/4$  наперед заданные константы, а  $E_t$  есть независимые и одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения 0,  $1/20$  и  $1/10$  с вероятностями  $3/5$ ,  $1/5$  и  $1/5$  соответственно. Как обычно, в каждый момент времени  $t$  агент знает текущий доход  $y_t$  и всю историю предыдущих доходов (включая  $y_{-1}$ ), а также сбережения  $s_{t-1}$ , и выбирает  $s_t$  и  $c_t$ .

Найдите оптимальную стратегию сберегания и потребления – то есть такое правило, которое описывает сколько сберегать и сколько потреблять как функцию от всего того что агенту известно в момент принятия решения. Замечание: в этом упражнении не нужно беспокоиться о том почему то правило, которое вы нашли, действительно является оптимальным.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1.

1. В стране  $A$  три времени года: весна, лето и осень. ВВП страны изменяется циклически: оно равно  $y_s$  весной,  $y_m$  летом и  $y_a$  осенью. Доход государства составляет фиксированную долю  $g$  от ВВП.

Государство максимизирует  $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$ , где  $c_t$  – это государственные расходы на момент времени (пара год, время года)  $t$ ,  $\beta$  – это коэффициент дисконтирования и  $u(x)$  – это функция полезности (возрастающая и вогнутая). Государство также может выпускать бонды (одаживать) или инвестировать средства в мировой рынок под процентную ставку (сезонную)  $R = 1/\beta$ . На начальный момент времени долг государства составляет  $B$ .

- (a) Выпишите оптимизационную задачу государства.  
 (b) Предложите и обоснуйте условие, которое вы хотите наложить на размер государственного долга в бесконечности.  
 (c) Решите задачу. Предъявите подробное объяснение того, почему ваше решение действительно максимизирует целевую функцию государства по сравнению со всеми другими возможными путями, удовлетворяющими условиям первого порядка.

2. Рассмотрим простую задачу о потреблении и сбережениях:

$$\begin{aligned} & \square \quad E[\ln c_0 + \beta \ln c_1] \rightarrow \max_{\{c_t\}_{t=0}^1, \{s_t\}_{t=0}^1 \text{ адаптированный}} \\ & \square \quad \text{s. t. } c_t + s_t \leq y_t + \frac{1}{\beta} s_{t-1} \text{ для } t = 0, 1, \\ & \square \quad s_1 \geq 0 \end{aligned}$$

где  $0 < \beta < 1$  – коэффициент дисконтирования, а  $y_t$  для  $t = 0, 1$  являются независимыми случайными, такими что  $y_0 = 3$  с вероятностью  $1/3$ ,  $y_0 = 2$  с вероятностью  $1/3$ ,  $y_0 = 1$  с вероятностью  $1/3$ , а  $y_1 = 3$  с вероятностью  $1/2$  и  $y_1 = 1$  с вероятностью  $1/2$ . Предположим также, что  $s_{-1} = 0$ .

Теперь я попрошу вас забыть ненадолго о том, что мы изучали касательно условий первого порядка в задачах с неопределенностью. Перепишите задачу в терминах курса Матэк-1 – то есть уделяя особое внимание целевой функции и всем ограничениям. Затем предоставьте достаточное число множителей Лагранжа и решите задачу используя методы первого модуля.

3. Рассмотрим задачу о потреблении и сбережениях:

$$\begin{aligned} & \square \quad E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t - \frac{1}{2} c_t^2 \rightarrow \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}, \{s_t\}_{t=0}^{\infty} \text{ адаптированный}} \\ & \square \quad \text{s. t. } c_t + s_t = y_t + \frac{1}{\beta} s_{t-1}, \\ & \square \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E[\beta^{t2} s_t] = 0 \end{aligned}$$

где  $0 < \beta < 1$  – коэффициент дисконтирования.

Предположим, что  $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$  – стохастический процесс со следующим свойством:  $y_t = \alpha y_{t-2} + (1 - \alpha)E_t$ , где  $\alpha \in (0, 1)$  – заранее заданная константа, а  $E_t$  – независимые одинаково распределенные случайные величины, равномерно распределенные на  $[0, 1]$ . Значение  $y_{-1}$  известно.

Решите задачу.

(В этой задаче вы можете не беспокоиться о том, почему условия первого порядка доставляют оптимум, а также о том, почему члены сходящиеся по вашему мнению к нулю, действительно к нему сходятся)

4. Фермер выращивает кроликов. Каждый год он может продать некоторое число кроликов по фиксированной цене  $p$ , а остальных оставить себе. Если он оставил  $x$  кроликов, тогда в следующем году у него будет  $kx$  кроликов, где  $k > 1$ . Фермер максимизирует дисконтированную полезность  $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log y_t$ , где  $0 < \beta < 1$  – коэффициент дисконтирования, а  $y_t$  – его доход в период  $t$ .
- (а) Запишите задачу в рекурсивном виде (уравнение Беллмана). Будьте внимательны к деталям в определении функции Беллмана – двусмысленность и опущения будут штрафовать.
- (б) Вычислите дисконтированную полезность фермера, если начальный запас кроликов  $z$ .

## Домашнее задание 2.

1. Рассмотрим задачу о потреблении и сбережениях:

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}, \{s_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{c_t} \\ & \text{s. t. } c_t + s_t \leq y_t + \frac{1}{\beta} s_{t-1} \text{ для всех } t = 0, 1, \dots, \\ & \quad s_t \geq 0 \text{ для всех } t = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где  $s_{-1} \geq 0$  и  $y \geq 0$

даны.

- Требуется ли этой задаче ограничение на бесконечности? Если да, приведите пример подходящего ограничения.
  - Выпишите задачу максимизации агента в рекурсивном виде (уравнение Беллмана). Будьте внимательны к деталям во время определения функции Беллмана. Определите оператор, для которого функция Беллмана является фиксированной точкой. (Не нужно беспокоиться о том, переводит ли он ограниченные функции в ограниченные.)
  - Угадайте вид этой фиксированной точки (с неизвестными константами, если нужно) и найдите её.
2. Пусть цена  $p_t$  некоторого товара – это процесс состоящий из независимых одинаково распределенных случайных величин, где  $t = 0, 1, \dots$ . Рассмотрим фирму, которая производит этот товар и не имеет влияния на цену. Предположим, что её производственная функция в каждый момент времени имеет вид  $y = \sqrt{l}$ , где  $y$  – это выпуск, а  $l$  – нанятый фирмой труд. Единственный вид издержек, которые несет фирма, это издержки на труд (зарплата), которые равны  $w$  (константа). Фирма может нанимать сотрудников в каждом периоде; однако рынок труда устроен нетривиально: каждый нанятый работник работает ровно два периода, то есть работники, нанятые в период  $t$  продолжают оставаться нанятыми в период  $t + 1$ . Кроме того, количество работников  $l_t$ , которых фирма может нанять в каждый период  $t = 0, 1, \dots$  ограничено:  $0 \leq l_t \leq 2$ . В этой задаче мы предположим, что  $l_t$  – это действительное (не обязательно целое) число. Для каждого момента времени тайминг следующий: сначала реализуется  $p_t$ , затем фирма решает сколько новых работников нанять в этом периоде, затем фирма производит товар и продает его по цене  $p_t$  (фирма не может запастись товаром). Цель фирмы – максимизировать ожидаемую дисконтированную прибыль, где коэффициент дисконтирования  $\beta \in (0, 1)$ .

Для определенности предположим также, что  $p \sim U[2, 4]$  и  $w = 1$ .

- Выпишите задачу максимизации фирмы в рекурсивном виде (уравнение Беллмана). Будьте внимательны к деталям во время определения функции Беллмана.

- (b) Определите оператор, для которого функция Беллмана является фиксированной точкой. Является ли этот оператор сжимающим отображением на некотором полном метрическом пространстве? Предоставьте полное обоснование.
- (c) Выполните одну итерацию уравнения Беллмана, начав с нулевой функции Беллмана.
- (d) Установите как можно больше приятных свойств функции Беллмана фирмы.

3. Приведите пример:

- (a) стационарного Марковского процесса, являющегося мартингалом;
- (b) стационарного Марковского процесса, не являющегося мартингалом;
- (c) мартингала, принимающего конечное множество значений, но не являющегося Марковским процессом.

4. Пусть  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  непустое конечное множество, и пусть  $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$  стохастический Марковский процесс такой что  $x_t \in \Omega$  для всех  $t = 0, 1, \dots$ . Пусть  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  функция, и пусть  $y_t = f(x_t)$  для любых  $t = 0, 1, \dots$ . Естественно,  $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$  тоже случайный процесс. Вопрос: всегда ли этот процесс будет Марковским? Докажите или приведите контрпример.

### Домашнее задание 3.

1. Экономика острова состоит из множества одинаковых фермеров; каждый фермер владеет кроличьей фермой. В каждый год запас  $s_t$  кроликов на ферме продаётся на соседний остров на потребление по фиксированной цене  $p$ ; однако кролики успевают размножиться до того как продаются, и на следующий год на ферме будет  $k_t s_t$  кроликов. Выручка  $p_t s_t$  от торговли в каждом периоде потребляется в том же периоде. Коэффициент воспроизводства  $k_t$  является функцией от Марковского процесса, управляющегося Марковской цепью  $(P, \pi)$ . Фермеры максимизируют  $E_0[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(p s_t)]$ , где  $\beta \in (0, 1)$  – коэффициент дисконтирования, а  $u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  – функция полезности.

Предположите, что в экономике можно торговать фермами. Причем агенты пренебрежимо малы по отношению к общему размеру экономики (то есть их предложение о покупке или продаже фермы не влияет на цену ферм).

(a) Запишите формально оптимизационную задачу фермера.

(b) Предположите, что Марковский процесс имеет три состояния, которым сопоставлены низкий, средний и высокий темпы роста, численно соответствующие  $k = 1/2$ ,  $k = 1$ ,  $k = 2$  соответственно. Переход между состояниями устроен следующим образом: если темп низкий, то с вероятностью 50-50 темп в следующем периоде будет низким или средним; если темп высокий, то с вероятностью 50-50 темп в следующем периоде будет средним или высоким; если темп средний, то с вероятностью 50-50 темп в следующем периоде будет низким или высоким. Кроме того, коэффициенты воспроизводства заданы через  $K = (1/2 \ 1 \ 2)^T$  и  $\beta = 2/3$ ,  $\gamma = 2$ . Вычислите цену фермы как функцию от состояния  $x_t$ , текущего запаса кроликов  $s_t$  и цены  $p$ . Пропишите предположения, которые вы делаете.

2. Предположим, что экономика состоит из множества одинаковых агентов, которые владеют одной единицей земли и выращивают свеклу. Урожай свеклы в период  $t$  равняется  $\theta_t e_t$ , где  $\theta_t$  представляет стохастический фактор, связанный с погодой (и одинаковый для всех агентов), а  $e_t \in \mathbb{R}_+$  – это усилия агента, которые он решает потратить, узнав текущий  $\theta_t$ . Каждый агент максимизирует  $E_0[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (u(c_t) - e_t)]$ .

В данной экономике также существует рынок, на котором агенты торгуют землей. Агенты не имеют влияния на цены, то есть отдельно взятое решение одного конкретного агента касательно продажи или покупки земли (или траты усилий на выращивание свеклы) не имеет влияния на рыночную цену.

Теперь предположим, что продуктивность  $\theta_t$  может быть высокой или низкой с соответствующими численными значениями 4 и 1. При этом  $\theta_{t+1}$  зависит только от значения  $\theta_t$ , а вероятность высокой продуктивности в следующем периоде равна  $2/3$  или  $1/6$ , если в текущем периоде продуктивность высокая или низкая соответственно. Также дано, что  $u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ , где  $\gamma = 2$ , а  $\beta = 3/4$ .

Наконец, предположим, что в каждом периоде агенты потребляют весь свой урожай свеклы.

- (a) При самых удобных (для вас) предположениях относительно цен вычислите цену земли. Пропишите предположения, которые вы делаете.
- (b) Предположим, что финансовый рынок также котирует цену страховки, которая выплачивает 1 завтра, если реализована низкая  $\theta$ . Используя предположения из части (a) вычислите цену такой страховки.



### Домашнее задание 4.

1. Незанятый рабочий ищет работу. Время дискретно. В каждый период на рынке появляется вакансия с зарплатой  $w$ , где зарплата является стохастической: она равномерно распределена на  $[60, 100]$ , а также независимо и одинаково распределена по времени. Если рабочий принимает предложение, он остается на этой работе навсегда, и получает предложенную зарплату  $w$  в каждом периоде. Если он отвергает предложение, то получает компенсацию по безработице  $c = 10$  и переходит в следующий период. Рабочий максимизирует  $E[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_t]$ , где  $u_t$  – его доход (который может быть равен  $w$ , если он занят, или  $c$ , если он незанят в период  $t$ ). Для определенности, пусть  $\beta = 0.9$ .

- (а) Найдите оптимальную стратегию рабочего.
- (б) Теперь предположите, что он может уволиться с работы. А именно, если он занят в некотором периоде  $t$ , то в конце этого периода, после получения зарплаты, он может анонсировать своё увольнение в следующем периоде. Тогда в период  $t + 1$  он наблюдает новое предложение, решает принять его или нет, и если он его не принимает, то получает пособие по безработице.

Запишите задачу в рекурсивном виде. Будьте внимательны при определении функции Беллмана. Найдите оптимальную стратегию рабочего.

- (с) Предположите теперь, что увольнение происходит иначе. Если рабочий занят, то в *начале* периода  $t$  он наблюдает текущее предложение с зарплатой  $w_t$  и может покинуть свою работу и сразу же принять это новое предложение.

Выпишите задачу в рекурсивном виде. Будьте внимательны при определении функции Беллмана. *Формально* выведите оптимальную стратегию рабочего.

2. Как обычно, незанятый рабочий ищет работу, с которой он не может уволиться, если принял предложение, и с которой он не может быть уволен. Существует компенсация по безработице  $c \in [0, 1)$ . Рабочий максимизирует дисконтированную сумму доходов. Предположите, что в этот раз стохастические предложения могут быть представлены следующим процессом:  $w_t = \alpha w_{t-1} + (1 - \alpha)E_t$ , где  $E_t$  распределены равномерно на  $[0, 1]$  и являются независимыми одинаково распределенными относительно времени, и  $\alpha \in (0, 1)$

- (а) Запишите задачу в рекурсивном виде (уравнение Беллмана). Будьте внимательны к деталям в определении функции Беллмана – двусмысленность и опущения будут штрафовать.

- (б) Является ли ваша функция Беллмана неподвижной точкой некоторого стягивающего отображения на полном метрическом пространстве? Предъявите ответ с доказательством.

- (c) Является ли функция Беллмана непрерывной? Возрастающей? Можете ли вы сказать что-нибудь о её наклоне? (Предъявите ответы с доказательствами.)
- (d) Должна ли оптимальная стратегия иметь пороговый вид? Если да, докажите. Если нет, предъявите примеры значений параметров, и покажите что оптимальная стратегия не может иметь порогового вида.
3. Безработный агент ищет работу. Вне зависимости от того занят он или нет предложения зарплат на рынке следуют Марковскому процессу  $x_t$ , который управляется Марковской цепью с матрицей переходов:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Численные значения зарплат задаются вектором  $W = (2 \ 4 \ 6)^T$ . Если агент незанят и принимает текущее предложение, то он получает зарплату до тех пор, пока его занятость не прекратится. Агент не может самостоятельно уволиться, однако, работодатель может уволить его с вероятностью, которая также зависит от текущего состояния  $x_t$  и задана вектором

$$\pi = (1/5 \ 3/4 \ 1/4)^T.$$

Увольнение происходит в конце периода, после того как агент забрал полученную зарплату. Агент максимизирует  $E[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_t]$ , где  $u_t$  – доход (равный  $w$ , если агент занят на работе с зарплатой  $w$ , или  $c$ , если он не занят в период  $t$ ). Коэффициент дисконтирования  $\beta = 1/2$  и компенсация по безработице  $c = 1$ .

- (a) Запишите задачу в рекурсивном виде (уравнение Беллмана). Будьте внимательны к деталям в определении функции Беллмана – двусмысленность и опущения будут штрафоваться.
- (b) Найдите оптимальную стратегию агента и ожидаемый дисконтированный приведенный поток его доходов как функции от состояний Марковского процесса.

---

## Математическая статистика

---

### Задания для промежуточной аттестации

Общий вес: 100 баллов.

1. (10 баллов) Дана выборка  $X_1, \dots, X_n$  из экспоненциального распределения со средним  $\theta$ .
  - (a) Найдите  $ML$  оценку для  $\theta$ . Является ли она несмещенной?
  - (b) Найдите  $ML$  оценку для  $\hat{\varphi}_{ML}$  для параметра  $\varphi = \theta^2$ . Найдите  $E[\hat{\varphi}_{ML}]$ . Является ли оценка несмещенной?
  - (c) Предложите несмещенную оценку для параметра  $\varphi = \theta^2$ .
  - (d) Найдите асимптотическое распределение  $\hat{\varphi}_{ML}$
2. (10 баллов) Опросы показали, что в Твери 29 из 100 опрошенных одобряют действия местной власти, а в Москве – 77 из 200.
  - (a) Постройте 90% доверительный интервал для разности  $p_1 - p_2$  долей населения одобряющих действия местной власти в Твери и Москве.
  - (b) На уровне значимости 10% тестируйте гипотезу  $p_1 = p_2$  против альтернативы  $p_1 = p_2$ .
3. (15 баллов) Дана выборка  $x_1, \dots, x_n$  из распределения  $N(\mu, 1)$ .
  - (a) (8 баллов) Найдите апостериорное распределение параметра  $\mu$ , считая, что априорная плотность распределения параметра  $N(0, 1)$ .
  - (b) (7 баллов) Найдите байесовскую точечную оценку  $\hat{\mu}$  как медиану апостериорного распределения и 95%-ый доверительный байесовский интервал для параметра  $\mu$ . Посчитайте их численно, если  $n = 2, x_1 = 0, x_2 = 1.5$ .
4. (15 баллов) Для проверки долговечности службы батарей цифровых камер был проведен эксперимент. Его цель определить, есть ли различие в сроке службы между четырьмя брендами батарей, используя семь различных камер. Каждая батарея была использована с каждой камерой один раз. Среднее время Бренда А – 43.86 часа, Бренда В – 41.28 часа, Бренда С – 40.86 часа, Бренда D – 40 часов. Далее представлена ANOVA таблица с некоторыми пропущенными элементами:

Source	Sum of Squares	df	Mean square	F-stat
Batteries				
Cameras			26	
Error				
Total	343			

- (a) (7 баллов) Заполните таблицу, используя информацию выше.
- (b) (3 балла) Есть ли значимая разница между сроком службы батарей разных брендов?
- (c) (5 баллов) Постройте 90%-ный доверительный интервал для разницы между брендами A и D. Есть ли значимая разница?
5. (10 баллов) Случайно выбранным 200 студентам разных специализаций был задан вопрос: "Считаете ли Вы списывание на экзамене абсолютно недопустимым?" Результаты опроса представлены в таблице:

	ФЭН	МИЭФ	Психология	Маркетинг
да	20	40	20	20
нет	20	20	30	30

Тестируйте на 5%-ном уровне значимости гипотезу о том, что отношение к списыванию не зависит от специализации. Прокомментируйте полученный результат.

6. (20 баллов) Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – выборка значений случайной величины  $X \approx \text{Poisson}(\lambda)$ . Рассмотрим статистики  $T = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  и  $U = \bar{X}$ , которые обе являются несмещенными оценками  $\lambda$ .
- (a) Покажите, что  $U$  является полной и достаточной для  $\lambda$ .
- (b) Используя (a) покажите, что  $V(s^2) > V(\bar{X})$ .
- (c) Вычислите оценку снизу для дисперсии несмещенной оценки  $\lambda$  по неравенству РаоКрамера.
- (d) Используя (c) покажите, что  $V(s^2) \geq V(\bar{X})$ .
7. (10 баллов) Восемь студентов РЭШ были отобраны случайным образом для тестирования гипотезы о том, что Философия укрепляет не только умственные, но и физические способности. Результаты студентов в беге на дистанции 100 м (в секундах) были записаны до- и после- интенсивного 7-дневного курса по Философии.
- (a) (7 баллов) Тестируйте гипотезу на 10%-ном уровне значимости.
- (b) (3 балла) Сформулируйте предположения, которые вы сделали.

---

До	13.2	14.5	17.0	16.5	14.3	18.7	12.1	14.7
После	13.1	14.2	15.0	16.0	14.2	19.0	12.1	14.5

---

8. (10 баллов) Концентрацию химического агента в жидкости может быть измерена с помощью нового измерительного прибора. Чтобы найти измерительную погрешность, было подготовлено семь образцов жидкости с известной концентрацией, использован измерительный прибор и посчитаны ошибки: 0.4, -1.1, -0.6, 1.5. Известно, что средняя ошибка  $E[X_k]$  равна нулю. Однако, точность убывает с количеством испытаний  $\text{Var}(X_k) = k \cdot \sigma^2$ ,  $k = 1, \dots, 4$ .
- (a) (4 балла) Оцените  $\sigma^2$ .
- (b) (4 балла) Постройте 90%-ный доверительный интервал для  $\sigma$ .
- (c) (2 балла) Опишите все использованные вами предпосылки.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1.

1. Пусть случайный вектор  $X_n = \begin{pmatrix} X_{1,n} \\ X_{2,n} \end{pmatrix}$  имеет асимптотически нормальное распределение:

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \Sigma), \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Найти асимптотическое распределение случайной величины  $Z_n = X_{1,n}^2 + X_{2,n}^2$ .
- (b) Оценить вероятность того, что  $Z_{100} > 5.1$ .
2. Пусть случайная величина  $X$  распределена равномерно  $U[0, \theta]$ . Имея случайную выборку размера  $n$ ,  $X_1, \dots, X_n$
- (a) Найти такое  $c$ , что оценка  $\hat{\theta}_1 = c \cdot 2x$  наиболее эффективна (имеет наименьшую MSE).
- (b) Найти такое  $c$ , что оценка  $\hat{\theta}_2 = c \cdot \max\{X_1, \dots, X_n\}$  наиболее эффективна (имеет наименьшую MSE).
- (c) Какая из двух оценок (a) и (b) наиболее эффективна?
3. Пусть случайная величина  $X$  распределена равномерно  $U[0, \theta]$ . Имея случайную выборку размера  $n$ ,  $X_1, \dots, X_n$
- (a) Найти несмещенную оценку параметра  $\theta$  из класса  $\hat{\theta} = c \cdot \ln\{X_1, \dots, X_n\}$  (или, что равносильно,  $\hat{\theta} = c \cdot X_{(1)}$ ).
- (b) Найдите  $MSE(\hat{\theta})$ .
- (c) Является ли  $\hat{\theta}$  состоятельной оценкой?
4. Два студента измерили содержание углерода в озере Москвы. Используя один и тот же инструмент, они вместе провели 10 измерений. Так как им нужно сдать самостоятельные домашние работы, первый студент использовал первые 8 наблюдений  $x_1, \dots, x_8$ , чтобы посчитать среднее по выборке  $\bar{x}$  и дисперсию  $s_x^2$ ; второй студент использовал последние 6 наблюдений  $x_5, \dots, x_{10}$ , чтобы посчитать среднее по выборке  $\bar{y}$  и дисперсию  $s_y^2$ . Считая, что наблюдения распределены равномерно  $N(\mu, \sigma^2)$ , и зная  $\bar{x} = 80$ ,  $\bar{y} = 70$ ,  $s_x^2 = 10$ ,  $s_y^2 = 8$ , найдите наиболее эффективную несмещенную оценку  $\mu$  из семейства  $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$ .
5. Пусть случайная величина  $X$  имеет распределение Бернулли

$$X = \begin{cases} 1, P = \theta, \\ 0, P = 1 - \theta; \end{cases}$$

$X_1, \dots, X_n$  – случайная выборка размера  $n$ .

$$\text{Оценка } \hat{\theta}_n = \begin{cases} \bar{X}, P = 1 - \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{2}, P = \frac{1}{n}. \end{cases}$$

- (a) Найти  $E(\hat{\theta}_n)$ ,  $V(\hat{\theta}_n)$ ,  $MSE(\hat{\theta}_n)$ . Является ли  $\hat{\theta}_n$  несмещенной оценкой? (b) Является ли  $\hat{\theta}_n$  состоятельной оценкой?

### Домашнее задание 2.

1. Пусть  $X_1, \dots, X_8$  – выборка размера 8 из нормального распределения  $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ ,  $\bar{x} = 30$ ,  $s_X = 5$ . Пусть  $Y_1, \dots, Y_3$  – независимая выборка размера 3 из нормального распределения  $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ ,  $\mu_Y = 0$ , и  $\sum_{i=1}^3 Y_i^2 = 84$ .

(a) На 10% уровне значимости протестируйте нулевую гипотезу о том, что дисперсия генеральных совокупностей распределений равны.

(b) Найдите 90% доверительный интервал дисперсии  $\sigma_X^2$ .

2. Пусть случайная величина  $X$  имеет плотность распределения  $f(x) = \frac{2x}{\theta^2} + c$ , при  $0 < x \leq \theta$ , и 0 в любом другом случае.

(a) Зная выборку  $\{X_i\} = \{1, 1.1, 2.9, 2, 2.5\}$  размера 5, найдите оценку методом моментов (ММ) параметра  $\theta$ .

(b) Зная выборку  $\{X_i\} = \{1, 1.1, 2.9, 2, 2.5\}$  размера 5, найдите оценку методом правдоподобия (ML) параметра  $\theta$ .

3. Пусть  $p$  – доля генеральной совокупности. Пусть вы тестируете нулевую гипотезу  $p = p_0 = 0.6$  против альтернативной гипотезы  $p < 0.6$ .

(a) Постройте тест на уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .

(b) Пусть есть выборка размера 100 и  $\hat{p} = 0.51$ . Какое ваше предположение? Какова величина p-value для теста?

(c) Найдите функцию мощности теста и проиллюстрируйте ее.

(d) Найдите вероятность ошибки второго рода если  $p = 0.45$ .

4. Пять машин (каждая со своими характеристиками) использовались для оценки влияния очистителя топлива (дополнение для увеличения работы) на пробег автомобиля. Расстояние на галлон топлива с использованием и без использования очистителя представлены в таблице:

with	18.1	10.0	7.8	22.4	25.8
without	17.2	9.4	8.3	20.1	27.0

(a) Является ли очиститель эффективным? (Увеличивается ли пробег с использованием очистителя?)

(b) Какие предположения вам понадобились в пункте (a)?

5. В газете написали, что социальный опрос показал, что  $45\% \pm 1.5\%$  избирателей собираются проголосовать за кандидата Р.

(a) Каков размер выборки, если принять 95% доверительный интервал?



- (b) Используя полученную информацию, найдите интервальную оценку вероятности того, что в выборке случайных избирателей размера 100, 50 или больше проголосуют за кандидата Р.

### Домашнее задание 3.

- Пусть  $X$  имеет гамма распределение с параметрами  $\alpha = 4$ ,  $\beta = \theta > 0$ .  
 $\{f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0 \text{ и ноль в любом другом случае.}\}$

  - Найти информацию Фишера  $I(\theta)$ .
  - Является ли ML оценка  $\hat{\theta}$  эффективной оценкой параметра  $\theta$ ?
  - Найти асимптотическое распределение  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ .
- Найти нижнюю границу Рао-Крамера и асимптотическую дисперсию оценки максимального правдоподобия  $\hat{\theta}$ , если есть случайная выборка из каждого из распределений, имеющих следующие плотности вероятности:

  - $f(x, \theta) = \theta^{-2} x e^{-x/\theta}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < \theta < \infty,$
  - $f(x, \theta) = \theta^{-1} x^{(1-\theta)/\theta}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \theta < \infty.$
- Пусть  $X_1, \dots, X_n$  случайная выборка из нормального распределения  $N(\mu, \theta)$   
 $\{EX = \mu, \text{Var}(X) = \theta > 0\}$ , где  $\mu$  известна. Пусть  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$   
 дисперсия выборки. Известно, что  $E(s^2) = \theta$ .

  - Какова эффективность  $s^2$ ?
  - Найти ML оценку  $\hat{\theta}$ .
  - Найти асимптотическое распределение  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ .
- Пусть  $X_1, \dots, X_n$  выборка из нормального распределения  $N(\mu, \sigma^2)$ .

  - Найдите такую константу  $c$ , что  $\hat{\sigma} = c \sum_{i=1}^n |X_i|$  будет несмещенной оценкой параметра  $\sigma$ .
  - Определите эффективность этой оценки.
- Пусть  $(X_i, Y_i), \quad i = 1, \dots, n$  случайная выборка из двумерного нормального распределения, где  $EX = \mu_1, EY = \mu_2, V(X) = V(Y) = \sigma^2, \text{Corr}(X, Y) = \rho = 1/2$ , где  $\mu_1, \mu_2, \sigma^2 > 0$  – неизвестные вещественные числа. Найдите LR тест для проверки гипотезы  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma^2$  неизвестна, против любых альтернативных гипотез. Функцией какой статистики с известным распределением является отношение правдоподобия  $\Lambda$ ?

### Домашнее задание 4.

- Имеется выборка  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 80$  наблюдений за количеством звонков на ресепшн за 10 мин. Известно, что в 20 наблюдениях было 0 звонков, в 27 наблюдениях – 1 звонок, в 17 наблюдениях – 2 звонка. Кроме того, известно, что среднее  $\bar{x} = 1.7125$ 
  - На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу, что количество звонков за 10 мин. следует Пуассоновскому распределению со средним 1.1.
  - На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу, что количество звонков за 10 мин. следует Пуассоновскому распределению.
- Пусть  $Y_1, \dots, Y_m$  – случайная выборка из генеральной совокупности, имеющей распределение Пуассона со средним  $\lambda_1$ . Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – случайная выборка из генеральной совокупности, имеющей распределение Пуассона со средним  $\lambda_2$ . Выведите наиболее мощный тест для проверки  $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = 2$  против  $H_1 : \lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = 3$
- Количество звонков на ресепшн гостиницы за 1 час подчиняется закону Пуассона. Обозначим  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – значения параметра этого распределения для рабочих дней и для выходных. Проведено 100 наблюдений в рабочие дни и 100 наблюдений в выходные. Получены средние значения количества звонков в час – 20 и 22 соответственно. Используйте тест отношения правдоподобия для тестирования гипотезы  $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$  против альтернативы  $H_1 : \lambda_1 \neq \lambda_2$  на уровне значимости  $\alpha = 0.05$
- На автосервис обращаются для устранения поломок владельцы двух типов автомашин. По статистике за год, количество неисправностей каждой категории для двух типов машин представлена в таблице:

	двигатель	подвеска	тормоза	рулевое управление	электрика
Типе А	24	41	17	12	70
Типе В	20	56	9	11	40

- Тестируйте на 5%-ном уровне значимости гипотезу о том, что нет существенного различия между типами машин по частоте поломок различных типов.
  - В надежности какой системы и как проявляется наибольшее различие между двумя типами автомобилей?
- Файл data-4.5.xlsx содержит 50 наблюдений случайной величины  $X$ . Тестируйте на 5%-ном уровне значимости гипотезу о том, что  $X \sim N(0, 1)$ , используя:
    - Критерий согласия  $\chi^2$  (Пирсона). Найдите р-значение.
    - Тест Колмогорова-Смирнова.

### Домашнее задание 5.

1. Случайная величина  $X$  имеет плотность распределения  $f(x) = \frac{2x}{\theta^2}$  при  $0 < x \leq \theta$  и 0 вне этого интервала. Априорная информация:  $\theta \in [0.5, 4.5]$ . Дана выборка размера  $n = 2$ ,  $\{X_{ij}\} = \{1, 2\}$ . Найти Байесовскую оценку параметра  $\theta$ , соответствующую квадратичной функции потерь.
2. Предположим, мы провели серию независимых испытаний по схеме Бернулли и записали  $X$ , номер первого “успеха” в испытаниях. Случайная величина  $X$  имеет геометрическое распределение с вероятностью “успеха”  $p$ . Бета-распределение – сопряжённое априорное распределение для  $p$ .
  - (а) Если в качестве априорного распределения мы выберем бета-распределение с параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ , какое апостериорное распределение имеет  $p|x$ ?
  - (б) Найдите байесовские оценки решения (Bayes estimators) для  $p$  и  $\theta = p(1 - p)$ .
3. Дана выборка  $x_1, \dots, x_n$  из распределения  $N(\mu, 1)$ .
  - (а) Найдите апостериорное распределение параметра  $\mu$ , считая, что априорная плотность распределения параметра  $N(0, 1)$ .
  - (б) Найдите байесовскую точечную оценку  $\hat{\mu}$  как медиану апостериорного распределения и 95%-ный доверительный байесовский интервал для параметра  $\mu$ . Посчитайте ее численно, если  $n = 2$ ,  $x_1 = -0.5$ ,  $x_2 = 1.0$ .
4. Рассмотрим байесовскую модель  $X_i|\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; априорное распределение  $p(\lambda) \propto \lambda^{-1/2}$ .
  - (а) Покажите, что постериорная плотность вероятности  $2n\lambda$  есть плотность вероятности распределения  $\chi^2(2y + 1)$ , где  $y = \sum_{i=1}^n x_{i1}$ . Пусть имеется выборка  $\{X_{ij}\} = \{6, 10, 12, 4\}$ ,  $n = 4$ .
  - (б) Используйте постериорную плотность вероятности из части (а), чтобы получить  $(1 - \alpha) \cdot 100\% = 95\%$  байесовский доверительный интервал (credible interval) для  $\lambda$ .
  - (с) Используйте постериорную плотность вероятности из части (а), чтобы определить байесовский тест для гипотез  $H_0 : \lambda \leq 8$  против  $H_1 : \lambda > 8$ .
5. Для трех типов автомобилей было измерено потребление топлива на 100 км. Результаты приведены в следующей таблице:

Type of car	1	2	3
Observations	10	8	12
Mean	6.84	7.55	7.96
Std.deviation	0.55	0.50	0.45

- (a) Тестируйте на 5%-ном уровне значимости гипотезу  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ .
- (b) Найдите 95% доверительный интервал для  $\mu_2$  (используйте *всю* доступную информацию).
- (c) Сформулируйте предположения, использованные вами в частях (a) и (b).

### Домашнее задание 6.

1. Дана случайная выборка  $x_1, \dots, x_n$  из показательного распределения со смещением. Плотность этого распределения имеет вид:  $f(x, \theta) = \begin{cases} e^{\theta-x}, & \text{если } x \geq \theta \\ 0, & \text{если } x < \theta \end{cases}$
- (a) Докажите, что статистика  $x_{(1)} = \min x_1, \dots, x_n$  является достаточной статистикой для параметра  $\theta$ .
- (b) Докажите, что  $x_{(1)}$  является полной статистикой для  $\theta$ .
- (c) Докажите, что если  $z \geq \theta$ , то условная функция распределения величины  $x_1$  при условии  $x_{(1)} = z$  равна  $F_{x_1 | x_{(1)}=z}(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x < z \\ 1 - \frac{n-1}{n} e^{z-x} & \text{если } x \geq z \end{cases}$ .
- (d) Рассмотрите следующую оценку параметра  $\theta$ :  $\hat{\theta}_0 = x_1 - 1$ . Докажите, что она несмещенная. Воспользовавшись результатом предыдущего пункта, постройте ее улучшение по Рао–Блэкуэллу, докажите, что полученная оценка является UMVUE для  $\theta$ .

## Микроэконометрика

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

1. *Иностранные институциональные инвесторы и инновационная деятельность фирм.* Эти вопросы относятся к статье [Luong et al. \[2017\]](#)<sup>1</sup>. [56 + 4 бонусных балла]
  - (a) Основы: [6]
    - i. Что является основным предметом исследования в работе? Важен ли он/интересен и почему?
    - ii. Какими являются основные выводы в работе?
    - iii. Какой тип данных используется в статье (пространственные данные, временные ряды, панельные данные, повторные пространственные данные и т. д.)?
  - (b) Вопросы на понимание стратегии "разность разностей"(Таблица 3): [10]
    - i. Взгляните на коэффициент 0.099\*\* из модели "разность разностей" указанный в таблице 3 Панели В. Запишите спецификацию регрессии, которую вы могли бы прогнать, чтобы получить эту конкретную оценку.
    - ii. Как можно интерпретировать эту оценку?
    - iii. В чем причина включения контрольных переменных в таблицу 3 Панели С?
    - iv. Почему в данные спецификации не включены *Treat* и *Post*?
    - v. В чем заключается смысл использования поиска соответствий по предрасположенности перед оцениванием методом "разность разностей"?
  - (c) Идентификационные допущения стратегии "разность разностей": [8]
    - i. Каково идентификационное допущение этой стратегии оценивания (метод разность разностей + поиск соответствия)? Как авторы подтверждают это допущение?
    - ii. Предположим, что существует разница между фирмами, выплачивающими дивиденды, и эту разницу невозможно наблюдать. Эти фирмы оперируют в странах-участницах договора, и в странах, не подписавших договор (в последних для фирм в среднем существует меньше инвестиционных возможностей), и это напрямую влияет

<sup>1</sup>Hoang Luong, Fariborz Moshirian, Lily Nguyen, Xuan Tian, and Bohui Zhang. How do foreign institutional investors enhance firm innovation? *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 52 (4):1449–1490, 2017

на инновации. Сведет ли это на нет использование оценки методом разность разностей?

- iii. Предположим, что существует другая государственная политика, совпадающая впоследствии с JGTRRA и распространяющаяся на все фирмы. Эту политику, однако, авторы не могут наблюдать. Повлияет ли этот факт на интерпретацию результатов?
- iv. На основании критериев приемлемости JGTRRA, описанных в разделе IV.A, какой плацебо тест можно было бы использовать, чтобы исключить эту проблему?

(d) Интерпретация стратегии "разность разностей": [6]

- i. Какое неявное допущение используют авторы (но не утверждение) для интерпретации коэффициента разности разностей в отношении влияния иностранной институциональной собственности на инновации?
- ii. Если это допущение сохранится, могут ли они использовать JGTRRA в другой стратегии идентификации? В какой?
- iii. Является ли это допущение правдоподобным? Можете ли вы придумать переменную, которая бы сделала это допущение недействительным?

(e) Вопросы на понимание спецификаций инструментальных переменных: [10]

- i. В чем смысл инструментализации доли участия иностранного институционального лица?
- ii. Какой инструмент используют авторы?
- iii. Какое идентификационное допущение стоит за этой стратегией оценивания?
- iv. Предположим, что ребалансировка MSCI увеличивает общий приток средств от тех инвесторов, которые следуют за индексом, а увеличение имеющихся средств в фирмах увеличивает инновации как таковые. Сведет ли это на нет использование инструментальной переменной?
- v. Предположим, что иностранные институциональные инвесторы выбирают фирмы, которые с большей вероятностью будут внедрять инновации на основе ненаблюдаемых факторов (<позитивный> отбор). Если инструмент является надежным, а эффект от воздействия является гомогенным, то какими будут величины коэффициентов OLS vs 2SLS? Согласуются ли значения коэффициентов в статье с таким позитивным отбором?

(f) LATE-интерпретация инструментальных переменных: [6]

- i. Предоставьте LATE-интерпретацию оценок инструментальной переменной с учетом их особенностей, используя простой английский язык.



- ii. Считаете ли вы, что эта конкретная подгруппа (совместимых) инвесторов, вероятно, будет осуществлять мониторинг, обеспечивать и внедрять новые технологии, т.е. использовать все механизмы активного управления, которые, как утверждают авторы, стимулируют инновации?
  - iii. Что вы можете сказать о вероятных механизмах, приводящих к таким результатам?
- (g) Несколько технических вопросов: [6]
- i. На стр. 1458, параграф 2, авторы утверждают, что они <винзоризируют все переменные уровня gm на 1-м и 99-м процентилях>. Объясните, что именно они делают.
  - ii. Какие стандартные ошибки используются в работе (например, в таблицах 2-4)? Какова цель использования таких стандартных ошибок?
  - iii. Почему отраслевые (и страновые) фиксированные эффекты не включены в спецификации 4-6 в Таблице 4? Могут ли они потенциально изменить результаты?
- (h) Отбор наблюдений: [4]
- Согласно таблице 1, панель А, около трети всех наблюдений приходится на Японию и еще одна треть наблюдений приходится на Тайвань и Корею. Эти страны в выборке также обладают одними из самых высоких показателей по уровню инновационной деятельности.
- i. Является ли внешняя значимость результатов предметом беспокойства?
  - ii. Является ли внутренняя значимость результатов предметом беспокойства?
- (i) Представьте некоторые критические конструктивные замечания в отношении статьи, которые не обсуждались выше или не были затронуты в самой работе. [до 4 бонусных баллов]

## 2. *Вакцинация.* [18]

Вы известный прикладной микроэконометрист, поэтому фармацевтическая компания пригласила вас разработать систему и оценить эффективность своей недавно разработанной вакцины против смертоносного вируса. Предположим для конкретности, что вы заинтересованы эффект в измерении эффекта частоты заболеваемости в течение определенного периода времени. Компания уже прорекламировала свою новую вакцину некоторое время назад и собрала данные о тех людях, которые ее попробовали. Вы также располагаете различными дополнительными данными, в том числе личностными характеристиками (пол, возраст, прошлое состояние здоровья, регион и т.д.), но не ограничиваясь только ими. Вы также располагаете данными об эпидемиологической ситуации в регионах.

- (a) Можете ли вы сравнить средний показатель заболеваемости среди тех, кто принял вакцину, и среди тех, кто не принимал вакцину, чтобы оценить эффект, представляющий интерес? Почему?
- (b) Опишите, каким образом можно использовать технику сопоставления для оценки эффекта, представляющего интерес.
- (c) Какие допущения вы должны принять, чтобы иметь возможность оценить интересующий вас эффект, используя описанный выше метод?
- (d) Вы помните, что <рандомизированные эксперименты – это золотой стандарт> и убедили компанию провести такой эксперимент, выбирая случайным образом, кто из добровольцев получит настоящий препарат, а кто нет. Можете ли вы сравнить средний показатель заболеваемости этих двух групп, чтобы оценить интересующий вас эффект? Почему?
- (e) Что означает провести <опыт двойным слепым методом> и в чем цель такого эксперимента? Опишите, как вы можете провести данный эксперимент (особенно с точки зрения пациента).
- (f) Как вы думаете, что является основным препятствием для реализации такого рандомизированного опыта двойным слепым методом в реальной жизни?
- (g) Что означает, что эксперимент должен обладать высокой <статистической мощностью> при обнаружении эффекта? Каким образом возможно ее увеличить?

После того, как вы доказали эффективность вакцины, правительство ее лицензировало, и теперь спустя 10 лет многие люди получили вакцину. Вам предлагается повторно оценить эффект, используя ту же самую процедуру (золотой стандарт), описанную выше.

- (h) Можете ли вы теперь сравнить показатели заболеваемости, чтобы оценить прямой эффект от вакцины? Почему? {Подсказка: подумайте о «коллективном иммунитете»}.
- (i) Какое допущение касательно концепции потенциальных последствий было нарушено в связи с этими новыми параметрами?

### 3. 2SLS vs Сопоставление. [6 + 4 бонусных балла]

Предположим, вы оценили отношение между  $Y$  и  $W$  (и, возможно, некоторыми ковариатами  $X$ ) сначала с помощью 2SLS, используя инструмент  $Z$ , а затем используя метод прямого совмещения ковариатов (как в Angrist, 1998). Оказалось, что  $\hat{\beta}_{2SLS} < \hat{\beta}_M < 0$ . В коде отсутствуют ошибки.

Опишите все возможные причины, почему так могло произойти. (Описав три причины, вы можете получить полный балл за задание, описав больше, вы можете получить бонусные баллы).

## Микроэкономика 1

### Задания для промежуточной аттестации

Общий вес: 100 баллов.

1. (60 баллов) Потребительская корзина формируется из трех различных благ. Предпочтения потребителя описываются функцией полезности  $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 \cdot x_2} + \sqrt{x_2 \cdot x_3}$ .
  - (a) (10 баллов) Выведите функцию Маршалловского спроса  $x(p, w)$ . Является ли она однородной? Соблюдается ли закон Вальраса? Можно ли считать все три блага нормальными в каждой точке?
  - (b) (10 баллов) Выведите функцию спроса Хикса  $h(p, u)$ . Является ли она однородной?
  - (c) (5 баллов) Выведите функцию расходов  $e(p, u)$ . Является ли она однородной? Вогнутой (выпуклой вверх) по  $p$ ?
  - (d) (15 баллов) Найдите матрицу Слуцкого коэффициентов замещения. Является ли она симметричной? Найдите хотя бы одно собственное число и собственный вектор матрицы.
  - (e) (10 баллов) Государство намеревается выручить  $T$  рублей с помощью введения акцизного сбора  $t_3$  (таким образом, что цена на товар  $x_3$  вырастает с  $p_3$  до  $p_3 + t_3$ , и этого достаточно для сбора необходимой суммы). Найдите компенсирующую и эквивалентную вариации дохода. Покажите, какая из вариаций приводит к большим потерям, вызванными введением налога.
  - (f) (10 баллов) Является ли введение акциза на товар  $x_1$  лучшей альтернативой? Почему?
  
2. (40 баллов) Функция полезности Бернулли для денежной суммы  $x$  у Андрея описывается как  $u_A(x) = \sqrt{x}$  (здесь и далее все релевантные уровни благосостояния могут принимать только неотрицательные значения).
  - (a) (2 балла) Как Андрей относится к риску?
  - (b) (10 баллов) Рассчитайте безрисковый эквивалент лотереи  $L$ , которая дает Андрею с изначальным уровнем благосостояния 20 рублей выигрыш, распределенный равномерно на  $[0, 1]$ .
  - (c) (6 баллов) Даны две лотереи,  $P$  и  $Q$ . Их выигрыши распределены равномерно на отрезках  $[a, b]$  и  $[c, d]$  соответственно. При каких условиях на параметры распределений лотерея  $P$  более предпочтительна, чем лотерея  $Q$ , с точки зрения стохастического доминирования первого порядка? С точки зрения стохастического доминирования второго порядка?

- (d) (8 баллов) Функция полезности Бернулли у Саши принимает вид  $u_S(x) = \ln(x + 1)$ . Можно ли утверждать, что Саша имеет большее неприятие к риску, чем Андрей?
- (e) (14 баллов) Функция полезности Бернулли у Елены задана как  $u_E(x) = -1/x$ . Ее изначальный уровень благосостояния такой же, как и у Андрея (20 рублей). Андрею предложена лотерея  $L$ , описанная в пункте (b). Он может договориться с Еленой разделить связанные с лотереей риски - в обмен на предварительный платеж  $m$  со стороны Елены, Андрей предлагает долю  $\alpha$  с выигрыша. Елена примет предложение Андрея, если ее положение будет по крайней мере не хуже, чем при отказе. Какие значения  $m$  и  $\alpha$  должен выбрать Андрей (для  $\alpha$  достаточно написать условия первого порядка, ответа в явной форме не требуется)? Улучшилось ли положение Андрея от кооперации с Еленой?

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1.

Решите следующие задачи из Rubinstein, Ariel. "Lecture notes in microeconomic theory." Princeton University, Princeton, NJ Google Scholar (2006):

1. Задача 4 после Лекции 2 (решение пункта (d) даст вам дополнительные баллы);
2. Задача 5 после Лекции 2 (решение пункта (c) даст вам дополнительные баллы);
3. Задача 2 после лекции 3;
4. Задача 3 после лекции 3;
5. Задача 4 после лекции 3.

### Домашнее задание 2.

Решите следующие задачи после Лекции 4 из Rubinstein, Ariel. "Lecture notes in microeconomic theory." Princeton University, Princeton, NJ Google Scholar (2006):

1. Задача 1;
2. Задача 4;
3. Задача 5;

Решите следующие задачи из Mas-Colell, Andreu, Michael Dennis Whinston, and Jerry R. Green. Microeconomic theory. Vol. 1. New York: Oxford university press, 1995.

4. 2.E.3;
5. 3.F.16.

### **Домашнее задание 3.**

Решите следующие задачи из Rubinstein, Ariel. "Lecture notes in microeconomic theory." Princeton University, Princeton, NJ Google Scholar (2006):

1. Задача 6 после Лекции 5;
2. Задача 7 после Лекции 5;
3. Задача 8 после лекции 5;

Решите следующие задачи из Mas-Colell, Andreu, Michael Dennis Whinston, and Jerry R. Green. Microeconomic theory. Vol. 1. New York: Oxford university press, 1995.

4. 3.D.7;
5. 3.E.3;
6. 3.E.4.

### **Домашнее задание 4.**

Решите следующие задачи из Mas-Colell, Andreu, Michael Dennis Whinston, and Jerry R. Green. Microeconomic theory. Vol. 1. New York: Oxford university press, 1995.

1. 3.G.15;
2. 6.B.4;
3. 6.B.7;
4. 6.C.1;
5. 6.C.4 (кроме пункта (с)).

## Микроэкономика 2

### Задания для промежуточной аттестации

Общая сумма баллов: 120

1. (20 баллов) На рынке с функцией спроса  $D(p) = 575 - 25p$  оперируют 100 фирм. Каждая фирма имеет функцию издержек  $C(q) = 4 - q - q^2$ .
  - (a) (10 баллов) Найдите краткосрочное равновесие: цену, общее производство, количество произведенного каждой фирмой товара, излишек производителя и прибыль.
  - (b) (10 баллов) Найдите долгосрочное равновесие: количество фирм, цену, производство, количество произведенного каждой фирмой товара, излишек производителя и прибыль.
2. (25 баллов) Функция спроса на апельсины в стране  $10 - p$ , функция предложения  $q = 4p$ . Цены на мировом рынке равны 3.
  - (a) Найдите равновесие в экономике до открытия границ (цены, производство, импорт, излишек производителя, излишек потребителя и общее благосостояние).
  - (b) Найдите равновесие в экономике после открытия границ (цены, производство, импорт, излишек производителя, излишек потребителя и общее благосостояние).
  - (c) Что произойдет, если правительство ввело тариф на экспорт в размере 1\$ на единицу товара? (Найдите цены, производство, импорт, излишек производителя, излишек потребителя и общее благосостояние)
  - (d) Партия “против тарифов” добилась замены тарифа на квоту так, что экспорт остался тем же, что и в части (c). Найдите объем квоты, излишек производителя, излишек потребителя и общее благосостояние.
3. (25 баллов) В городе Сколково остался один оператор сотовой связи – МТС. Компания обслуживает два типа людей, профессоров и студентов. Студентов в два раза больше, чем профессоров. Их полезности, если они говорят по телефону  $q$  минут в месяц и платят за это  $T$  рублей, равны  $u(q, T) = \theta \sqrt{q - T}$ .  $\theta = 1$  для студентов и  $\theta = 2$  для профессоров. Предельные издержки производства равны 0.05.
  - (a) Согласно закону РФ, сотовая компания имеет право предоставлять разные месячные тарифы для студентов – при предъявлении студенческого билета при покупке – и для профессоров. Найдите стратегию, максимизирующую прибыль фирмы (и саму прибыль).

- (b) Профсоюз профессоров добился того, что компания не имеет права требовать студенческий билет, и тем самым не может отличить профессора от студента. Как теперь будет действовать фирма? Найдите стратегию, максимизирующую прибыль фирмы (и саму прибыль).
4. (25 баллов) Петр, Иван и Андрей решают домашку. У них осталось на это три дня, и за это время нужно успеть решить 6 задач. Если они потратят  $h$  часов в день на решение домашки, они сделают  $\bar{p} = h$  задач и получат полезность  $u_t = -h$  (величины  $p$  и  $h$  могут быть не целочисленными). Их временные предпочтения  $U = u_0 + \beta \delta^t u_t$ .
- Петр – time consistent ( $\beta = 1$ ), Иван – sophisticated time inconsistent ( $\beta = 1/2$ ,  $\tilde{\beta} = 1/2$ ), Андрей – naive time inconsistent ( $\beta = 1$ ,  $\tilde{\beta} = 1$ ). Для Петра, Ивана и Андрея  $\delta = 1$ .
- (a) (5 баллов) Как Петр распределит время в эти три дня?
- (b) (10 баллов) Как Иван распределит время в эти три дня?
- (c) (10 баллов) Как Андрей распределит время в эти три дня?
5. (25 баллов) На рынке оперируют две фирмы с предельными издержками  $c_1 = 2$  и  $c_2 = 4$ . Функция спроса  $D(p) = 20 - p$ . Найти равновесия в случае
- (a) (10 баллов) модели Штакельберга, где первый игрок ходит первым,
- (b) (10 баллов) модели Курно (сравните прибыль первой фирмы в Курно и Штакельберге),
- (c) (5 баллов) картеля.
- для всех случаев (a) - (c) найти цену, количество товара производимого каждой фирмой и общее количество товара.



## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1.

1. Фирма использует 10 ед. труда и 20 ед. капитала для производства 40 ед. выпуска. Если предельная производительность труда равна 2 и технология характеризуется постоянной отдачей от масштаба, то какова предельная производительность капитала?
2. Посчитайте эффект отдачи от масштаба и эластичность замещения факторов для следующих производственных функций:

(a)  $q = K^2 + L^2$

(b)  $q = K^4 + L^4 + 2K^2L^2$

3. Есть два типа рабочих: неопытные  $L$  и квалифицированные  $S$ . Квалифицированные могут работать сами или курировать работу неопытных. Работа индивидуально, каждый работник может произвести 2 ед. выпуска, а группа из двух человек - 10 ед. Каждой группе необходим куратор. Выведите производственную функцию, которая показывает сколько единиц выпуска можно получить для  $S$  квалифицированных и  $L$  неопытных рабочих.
4. Покажите, что для производственной функции с постоянной отдачей от масштаба  $q = f(K, L)$  выполняется

$$q = f_K K + f_L L$$

5. У фирмы есть два завода для производства товара  $x$ . Функции издержек:

$$c_1(x_1) = \frac{x_1^2}{2}, \quad c_2(x_2) = x_2^2,$$

где  $x_i$  – количество товара  $x$ , выпущенного на заводе  $i$ . Выведите функцию издержек фирмы.

6. Выведите функцию издержек для производственной функции  $q = K^2 + L^2$ .

### Домашнее задание 2.

1. У производственной функции  $q = F(K, L)$  эффект отдачи от масштаба постоянный. Докажите, что функция издержек линейна по выпуску.
2. Замечено, что, когда цены на произведенную продукцию растут, максимизирующие прибыль конкурентные фирмы нанимают больше квалифицированных и меньше неквалифицированных работников. Допустим, вторая группа создала профсоюз и добилась для себя повышения заработной платы.
  - (а) Как изменился спрос фирмы на неквалифицированных работников?
  - (б) Как изменилось предложение фирмы?
3. Пусть  $AVC = 3 + q$ , а постоянные издержки равны 3. Какую прибыль фирма получит в краткосрочном периоде?
4. Для производства  $q$  ед. продукции фирма использует три фактора: труд  $L$ , капитал  $K$  и землю  $Z$ . Заработную плату  $w$ , ставку процента  $r$  и аренду  $t$  определяет рынок (фирма принимает как данность). Производственная функция определена как  $q = (KLZ)^{1/3}$ . В краткосрочном периоде количество арендованной земли фиксировано  $Z = Z_0$ . Найдите краткосрочную функцию издержек. Найдите переменные и фиксированные издержки. Нарисуйте на графике кривые средних и предельных издержек.

### Домашнее задание 3.

1. Даны кривые предложения  $Q^S = p$  и спроса  $Q^D = 10 - p$ .
  - (a) Найдите цену и выпуск в конкурентном равновесии. Посчитайте излишки потребителей и производителей.
  - (b) Допустим, государство облагает торговым налогом в 1.5 рублей на ед. продукции производителей и в 0.5 рублей на ед. продукции потребителей. Посчитайте новые равновесные цену, выпуск, излишки потребителей и производителей и общую сумму налоговых поступлений. Чему равны потери общественного благосостояния?
2. Рассматривается конкурентный рынок с 5 потребителями, у которых функция спроса одинаковая и задана как  $D_i(p) = 4 - p$ . Фирмы используют одинаковую технологию с функцией издержек  $C(q) = 1 + q^2$ .
  - (a) Найдите количество фирм, цену и объем выпуска (для каждой фирмы) в долгосрочном конкурентном равновесии.
  - (b) Два новых потребителя входят на рынок, который находится в долгосрочном конкурентном равновесии (описанным в предыдущем пункте). Найдите цену и выпуск для краткосрочного равновесия.
3.  $Q^D = 3000 - 300p$  - функция спроса. На рынке 300 фирм с одинаковыми функциями издержек:  $c(q) = 1 + q^2/2$ .
  - (a) Найдите цену и выпуск в краткосрочном конкурентном равновесии. Посчитайте излишки потребителей и производителей.
  - (b) Допустим, все фирмы объединились в одну большую монополию. Выведите функцию издержек монополиста. Нарисуйте на графике кривую предельных издержек и сравните с кривой предложения из пункта (a).
  - (c) Найдите цену и выпуск монополиста. Посчитайте излишки производителей и потребителей.
  - (d) Сравните (a) и (c). Посчитайте потери общественного благосостояния (издержки монополии).
4. В конкурентном равновесии пропорциональный налог ухудшает общественное благосостояние. Будут ли пропорциональные субсидии увеличивать благосостояние? Кто выиграет, а кто проиграет от предоставления государством субсидии производителям в 1 рубль на ед. продукции.

### Домашнее задание 4.

1. Предположим, что производитель-монополист продаёт свой товар двум потребителям, расположенным в разных регионах. Функции спроса в этих регионах:  $q_1 = 1 - p_1$  и  $q_2 = 1/2 - p_2$ . Издержки на производство и транспортировку равны нулю.
  - (a) Предполагая, что монополист должен установить одинаковые цены в обоих регионах, вычислите единую цену, которую он установит.
  - (b) Что произойдет, если монополист сможет устанавливать двухступенчатые тарифы?
  - (c) Предположите, что монополист может использовать дискриминацию третьего рода. Вычислите цены, максимизирующие прибыль для каждого региона.
  - (d) Вычислите благосостояние (сумму излишков потребителя и производителя) в случаях единой цены и дискриминации третьего рода. Увеличивает ли дискриминация третьего рода благосостояние? Справедлив ли этот результат в общем случае?
2. Для каждого из следующих случаев объясните почему монополия использует ценовую дискриминацию и дискриминация какого рода использована?
  - (a) Российская электрическая монополия взимает меньший тариф (в смысле рублей за киловат) с домохозяйств, имеющих электрические плиты.
  - (b) Кинотеатры взимают более высокие цены за вечерние показы.
  - (c) Московское метро взимает  $x$  рублей за билет на две поездки, и  $y$  рублей за билет на десять поездок, причем  $y < 5x$ .
  - (d) Московский музей взимает различные цены с детей, студентов, взрослых россиян и иностранцев.
  - (e) Двухлитровая бутылка колы стоит  $x$  рублей, в то время как бутылка объемом 0.6 стоит  $y$  рублей, и  $x = 2y$ .
  - (f) Ночные клубы устанавливают меньшие входные цены для дам.
3. (a) Рассмотрим наивного индивида с квази-гиперболической полезностью, причем  $\beta = 1/2$  и  $\delta = 1$ . Время индексируется целыми числами  $t = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Этот индивид должен закончить проект до дедлайна  $T$ . В период  $t$ , издержки (недисконтированные) на исполнение проекта составляют  $(3/2)^t$  единиц полезности. Когда индивид закончит проект?
  - (b) Теперь рассмотрим опытного индивида с квази-гиперболическими предпочтениями, где  $\beta = 1/2$  и  $\delta = 1$ . Когда опытный индивид закончит проект?

### Домашнее задание 5.

1. На рынке присутствует  $N$  фирм. Первая фирма ходит первой (выбирает  $q_1$ ). Затем  $N - 1$  оставшихся фирм наблюдают  $q_1$  и исполняют равновесие Курно-Нэша. Найдите равновесие. Сравните его с равновесиями в случаях идеальной конкуренции, монополии, олигополии Курно с  $N$  и  $2N$  фирмами (сравнивать общий выпуск и излишки потребителя и производителя). Функция спроса линейная  $q = a - p$ . Предельные издержки на производство равны  $c$ .
2. Индустрия состоит из трех одинаковых фирм. Обратная функция спроса  $P(Q) = 1 - Q$ . Предельные издержки нулевые.
  - (a) Вычислите равновесие Курно.
  - (b) Покажите, что если две из трех фирм сольются (трансформировав таким образом рынок в дуополию), выручка этих фирм уменьшится. Объясните.
  - (c) Что случится, если все три фирмы сольются?
3. Рассмотрите две фирмы, которые конкурируют по количеству и имеют одинаковые предельные издержки  $MC_1 = MC_2 = 0$ . Обратная функция спроса  $P(Q) = 1 - Q$ .
  - (a) Каким будет равновесие Курно? (Вычислите выпуск и прибыль для каждой фирмы)
  - (b) Рассмотрите бесконечно повторяющуюся дуополию Курно с коэффициентом дисконтирования  $0 < \delta < 1$ . Обе фирмы принимают следующую стратегию: каждая производит половину монопольного выпуска пока кто-нибудь не отклонится. Если одна из фирм отклоняется, то другая фирма переключится на уровень производства Курно навсегда. Возможно ли поддержать молчаливый сговор?
4. В примере с пляжем с отелями найдите равновесие, в котором две фирмы на первой стадии одновременно выбирают место расположения отелей, а на второй одновременно выбирают цены.
5. Функция спроса линейна  $q = a - p$ . Издержки на производство  $c(q) = F + cq$ . На рынке имеет место конкуренция по Курно. Сколько фирм будет на рынке в долгосрочной перспективе?
6. Рассмотрите дуополию Бертрана с несовершенными субститутами. Предположите, что потребители максимизируют  $q_1 + aq_2 - q_1^2/2 - q_2^2/2 - bq_1q_2 - (p_1q_1 + p_2q_2)$ , где  $p_1, q_1$  есть цена и количество товара первой фирмы, а  $p_2, q_2$  — цена и количество товара второй фирмы. Предельные издержки нулевые. Найдите равновесие Бертрана.

## Микроэкономика 3

### Задания для промежуточной аттестации

Общий вес: 80 баллов.

1. (а) (10 баллов) Графически проиллюстрируйте *неравновесный* вектор цен в экономике, описываемой коробкой Эджуорта, выделив соответствующий излишек спроса и предложение.
- (б) (10 баллов) Сформулируйте версию второй фундаментальной теоремы благосостояния для локально не насыщаемых предпочтений,  $I$  потребителей,  $J$  производителей и  $L$  товаров. (Подсказка. Определения не нужны. В точности формулируйте выводы и все предположения теоремы.)
2. Рассмотрим модель производства  $2 \times 2$  с постоянной отдачей от масштаба. Предположим, что издержки фирм на производство одной единицы выпуска задаются функцией от цен на факторы производства  $w = (w_1, w_2) \gg 0$ :

$$c_1(w) = \frac{w_1^{3/4} w_2^{1/4}}{3/4}, \quad c_2(w) = \frac{w_1^{1/2} w_2^{1/2}}{1/2}.$$

Выпуск фирм продаётся на международном рынке по следующим ценам за единицу:

$$p_1 = 4, \quad p_2 = 2\sqrt{3}.$$

Кроме того, совокупный запас факторов 1 и 2 дан соответственно:

$$\bar{z}_1 = 2 + \sqrt{1/3}, \quad \bar{z}_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

- (а) (15 баллов) Посчитайте цены факторов производства, их распределение и выпуск фирм во внутреннем равновесии.
- (б) (5 баллов) При каких значениях  $\bar{z}_1$  и  $\bar{z}_2$  фирма 1 прекратит деятельность в равновесии? Кратко проинтерпретируйте свой ответ и приведите интуицию.
- (с) (5 баллов) Кратко опишите оптимизационный метод для вычисления набора всех эффективных распределений факторов в этой модели, вне зависимости от значений  $p_1$  и  $p_2$ . (Подсказка. Мы обсуждали два связанных метода. Вы можете использовать любой из них. Нет необходимости что-либо вычислять; просто опишите метод.)
3. Рассмотрим стандартную модель последовательного обмена с одним товаром, тремя состояниями мира, тремя *Эрроу активами* (Arrow securities) и

двумя потребителями. Пусть  $x_{si}$  обозначает потребление потребителя  $i = 1, 2$  в состоянии мира  $s = 1, 2, 3$ . Функция полезности Бернулли потребителей не зависит от состояния мира и задаётся следующим образом:

$$u_1(x_{s1}) = \sqrt{x_{s1}}, \quad u_2(x_{s2}) = \ln x_{s2}$$

Оба потребителя дают наступлению состояния  $s$  вероятность  $\pi_s$ , где

$$\pi_1 = \frac{1}{6}, \quad \pi_2 = \frac{2}{6}, \quad \pi_3 = \frac{3}{6}$$

Потребители наделены следующими векторами запасов:

$$\omega_1 = (0, 3, 0), \quad \omega_2 = (3, 0, 1).$$

(Как обычно,  $s$ -ый элемент вектора  $\omega_i$  обозначает запас потребителя  $i$  в состоянии  $s$ .) Вопросы (a)-(d) ниже относятся к модели равновесия Раднера.

- (a) (5 баллов) Пусть  $q_s$  обозначает цену  $s$ -ого Эрроу актива, который даёт положительную выплату в состоянии мира  $s$ . Найдите зависимость между  $q_1$  и  $q_2$ . Объясните свой ответ.
- (b) (10 баллов) Нормируем  $q_3$  к 1. Используйте свой ответ к пункту (i), чтобы определить потребительские планы потребителей и портфели активов как функции от  $q_1$ .
- (c) (5 баллов) Посчитайте значение  $q_1$ . Упростите ответ насколько это возможно. (Подсказка. Ответ должен быть числом, а не длинным уравнением. Но это число немного <уродливое>, так как оно иррациональное.)
- (d) (5 баллов) Приведите формулу цены любого дополнительного актива, который можно ввести в эту экономику.
4. (10 баллов) Рассмотрим стандартную модель обмена с неопределённостью,  $S$  состояниями мира и  $L$  товарами. Зафиксируем потребителя  $i$ . Пусть  $B_i^{AD}(p)$  и  $B_i^R(\tilde{p}, \tilde{q})$  обозначают его бюджетное множество (потребительских планов) в моделях Эрроу-Дебрё и Раднера соответственно. Для модели Раднера предположим, что рынок активов состоит из  $S$  Эрроу активов, которые платят в единицах товара 1. При строго положительном векторе цен Эрроу-Дебрё  $p \in R^{LS}$  докажите, что существуют спот цены  $\tilde{p} \in R^{LS}$  и цены активов  $\tilde{q} \in R^S$ , такие что  $B_i^{AD}(p) = B_i^R(\tilde{p}, \tilde{q})$ .

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1.

Задачи 1-3 относятся к экономике, описываемой коробкой Эджуорта (Edgeworth Box Economy), а задачи 4-5 – к экономике Робинзона Крузо.

1. Графически продемонстрируйте, что если кривые безразличия потребителей толстые (ввиду отсутствия локальной ненасыщаемости (local non-satiation)), то вывод первой фундаментальной теоремы благосостояния может не выполняться. То есть может существовать равновесие, не являющееся оптимальным по Парето.
2. Нормируйте цену блага 1, установив  $p_1 = 1$ . Рассчитайте равновесное значение  $p_2$  и равновесное распределение как функции от параметра  $\alpha \in (0, 1/2)$  для следующих функций полезности и запасов:

$$u_1(x_{11}, x_{21}) = (x_{11})^\alpha (x_{21})^{1-\alpha}, \quad \omega_1 = (2, 1)$$

$$u_2(x_{12}, x_{22}) = (x_{12})^{2\alpha} (x_{22})^{1-2\alpha}, \quad \omega_2 = (2, 1)$$

3. Нормируйте цену блага 1, установив  $p_1 = 1$ . Рассчитайте равновесное значение  $p_2$  и равновесное распределение как функции от параметра  $a > 0$  для следующих функций полезности и запасов:

$$u_1(x_{11}, x_{21}) = x_{11} + x_{21}, \quad \omega_1 = (1, 1)$$

$$u_2(x_{12}, x_{22}) = (x_{12})^{1/2} (x_{22})^{1/2}, \quad \omega_2 = (0, a)$$

(Подсказка. В зависимости от значения  $a$  в равновесии мы имеем либо  $p_2 = 1$ , либо  $p_2 < 1$ . Также верно, что равновесие единственно для любого значения  $a$ , что можно проверить в качестве дополнительного упражнения.)

4. Дайте графический пример, в котором вторая фундаментальная теорема благосостояния не выполняется из-за того, что предпочтения потребителя (Робинзона) не являются выпуклыми. Обоснуйте свой ответ.
5. Найдите равновесные цены, прибыль и потребление для  $u(x_1, x_2) := \ln x_1 + \ln x_2$  и  $f(z) := z^{1/4}$ .



## Домашнее задание 2.

Задачи 1-4 относятся к модели производства  $2 \times 2$  с постоянной отдачей от масштаба.

1. Предположим, что функции производства одной единицы выпуска зависят от цен факторов производства  $w = (w_1, w_2) \gg 0$  и имеют следующий вид:

$$c_1(w) = \frac{w_1^{3/4}}{3/4} \frac{w_2^{1/4}}{1/4},$$

$$c_2(w) = \frac{w_1^{1/4}}{1/4} \frac{w_2^{3/4}}{3/4}.$$

Пусть  $p_1 = 4$  и  $p_2 = \sqrt[4]{4}$  задают цены одной единицы выпуска фирм. Кроме этого, предположим, что суммарные запасы двух факторов производства равны  $\bar{z}_1 = 1 + \frac{1}{3}$  и  $\bar{z}_2 = 1 + \sqrt{3}$ . Найдите цены факторов производства и распределение во *внутреннем* равновесии.

2. Предположим, что функции производства одной единицы выпуска зависят от цен факторов производства  $w = (w_1, w_2) \gg 0$  и имеют следующий вид:

$$c_1(w) = \frac{w_1^{2/3}}{2/3} \frac{w_2^{1/3}}{1/3},$$

$$c_2(w) = \frac{w_1^{1/2}}{1/2} \frac{w_2^{1/2}}{1/2}.$$

Пусть

$$p_1 = \frac{6}{2^{2/3}} \quad \text{и} \quad p_2 = 3$$

задают цены одной единицы выпуска фирм. Кроме этого, предположим, что суммарные запасы двух факторов производства равны  $\bar{z}_1 = 2$  и  $\bar{z}_2 = 1$ . Найдите цены факторов производства и распределение в равновесии, в котором фирма 2 прекращает свою деятельность. Проверьте, что решения фирм действительно оптимальны при ценах факторов производства, которые вы вычислили.

3. Предположим, что для  $w = (w_1, w_2) \gg 0$ ,

$$a_{11}(w) := \frac{2}{3w_1} \frac{w_1^{2/3}}{2/3} \frac{w_2^{1/3}}{1/3}$$

$$a_{21}(w) := \frac{1}{3w_2} \frac{w_1^{2/3}}{2/3} \frac{w_2^{1/3}}{1/3}$$

$$a_{12}(w) := \frac{1}{3w_1} \frac{w_1^{1/3}}{1/3} \frac{w_2^{2/3}}{2/3}$$

$$a_{22}(w) := \frac{2}{3w_2} \frac{w_1}{1/3}^{1/3} \frac{w_2}{2/3}^{2/3}$$

где  $a_j(w) := (a_{1j}(w), a_{2j}(w))$  – это условный спрос фирмы  $j$  на факторы производства, соответствующий одной единице выпуска. Предположим, что  $p_1 = p_2 = 1/2$ . Найдите равновесное распределение факторов производства и цены как функции от запасов факторов производства  $\bar{z}_1, \bar{z}_2 > 0$ . (Не забудьте рассмотреть граничные решения, если таковые существуют.)

4. Предполагая, что равновесие внутреннее, графически проиллюстрируйте влияние роста  $p_1$  на равновесное распределение факторов производства и уровни выпуска двух фирм. Детально обоснуйте свой ответ (*Подсказка.* В своём обосновании вам нужно прокомментировать изменение углов наклона векторов спроса на факторы производства. Для этого вы можете использовать (квази)вогнутость  $c_j(w)$  и вывод из теоремы Столпера-Самуэльсона (Stolper-Samuelson). Более того, также выполняется  $a_j(tw) = a_j(w)$  для всех  $t > 0$  и  $w \gg 0$ .)
5. Предположим, что в малой открытой экономике (с закрытыми рынками факторов производства) существуют  $J$  фирм и  $L$  факторов производства. Производственные функции фирм,  $f_1, \dots, f_J$ , не обязательно имеют постоянную отдачу от масштаба. Фирма  $j$  решает следующую задачу:

$$\max_{z_j \geq 0} p_j f_j(z_j) - w z_j.$$

Общественный планировщик, в свою очередь, решает задачу максимизации выручки:

$$\max_{z_1, \dots, z_J} \sum_{j=1}^J p_j f_j(z_j) \quad \text{при ограничении} \quad \sum_{j=1}^J z_j = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_L).$$

Предполагая, что каждая фирма использует положительное количество каждого фактора производства, выведите условия первого порядка для обеих задач. Покажите, что не расточительное (non-wasteful) и достижимое распределение факторов производства  $(z_1, \dots, z_J)$  является равновесным тогда и только тогда, когда оно решает задачу общественного планировщика (предполагая, что производственные функции вогнуты, то есть условия первого порядка необходимы и достаточны). В частности, обоснуйте, как вы можете получить равновесные значения цен факторов производства,  $w^* = (w_1^*, \dots, w_L^*)$ , из задачи планировщика.

*Замечание.* Как известно, существует альтернативная форма задачи максимизации выручки, выраженная в уровнях выпуска  $q_1, \dots, q_J$ . В этом случае мы имеем  $q_j = f_j(z_j)$  и концентрируем внимание на границе эффективности (efficient frontier), то есть границе производственных возможностей. Тем не менее, очевидно, задача максимизации выручки требует эффективного использования ресурсов (иначе, с помощью подходящего перераспределения

факторов производства между фирмами мы можем одновременно увеличить выпуск всех фирм, что подразумевает ещё более высокий уровень выручки). Поэтому мы можем просто решить задачу максимизации выручки при ограничении на ресурсы, не беспокоясь об эффективности.

### Домашнее задание 3.

1. Рассмотрим экономику, описываемую коробкой Эджуорта (Edgeworth box economy), с двумя товарами. Потребительские запасы равны  $\omega_1 := \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 4\right)$ ,  $\omega_2 := \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 5\right)$ . Предположим, что функции полезности двух потребителей заданы следующим образом:

$$u_1(x_1) := x_{11} + (x_{21})^{1/2} \quad u_2(x_2) := \sqrt{8x_{12} + (x_{22})^{1/2}}.$$

- (а) Найдите множество Парето-оптимальных распределений параметрически, как функцию от уровня полезности потребителя 2.
- (б) Для каждого внутреннего Парето-оптимального распределения найдите соответствующее равновесие с трансферами.
2. Пусть  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$  обозначают совокупные запасы двух благ в экономике, описываемой коробкой Эджуорта. Предположим также, что функции полезности двух потребителей заданы следующим образом:

$$u_1(x_1) := (x_{11})^{2/3}(x_{21})^{1/3} \quad u_2(x_2) := (x_{12})^{1/3}(x_{22})^{2/3}.$$

Рассмотрим следующую задачу максимизации благосостояния как функцию от  $\lambda \in (0, 1)$ :

$$\max_{(x_1, x_2)} \lambda u_1(x_1) + (1 - \lambda) u_2(x_2) \quad \text{при } x_{\xi 1} + x_{\xi 2} = \bar{\omega}_{\xi} \text{ и } x_{\xi i} \geq 0 \text{ для } \xi, i \in \{1, 2\}.$$

Пусть  $(x_1(\lambda), x_2(\lambda))$  обозначает решение, где  $x_i(\lambda) = (x_{1i}(\lambda), x_{2i}(\lambda))$  для  $i = 1, 2$ .

- (а) Предполагая, что решение внутреннее с  $x_i(\lambda) \gg 0$  для  $i = 1, 2$ , используйте условия первого порядка для задачи 1, чтобы посчитать отношения  $\frac{x_{11}(\lambda)}{x_{21}(\lambda)}$  и  $\frac{x_{12}(\lambda)}{x_{22}(\lambda)}$  в зависимости от  $\lambda$ .
- (б) Заметим, что  $\frac{x_{11}(\lambda)}{x_{21}(\lambda)} > \frac{x_{12}(\lambda)}{x_{22}(\lambda)}$  и оба отношения убывают по  $\lambda$ . Какие необходимы дополнительные условия на  $\bar{\omega}_1$ ,  $\bar{\omega}_2$  и  $\lambda$  в задаче 1, чтобы, как вы и предполагали, решение было внутренним? Графически проиллюстрируйте множество внутренних эффективных распределений и объясните роль  $\lambda$  на графике. (Подсказка. Можете применять алгебру для характеристики условия внутренности решения, но это не обязательно. Смотрите ниже.)
- (с) Свяжите задачу максимизации благосостояния из номера 1 с задачей максимизации выручки, рассмотренной в номере 5 из домашнего задания 2 (В конце концов, в целях анализа эффективности функция полезности может рассматриваться как производственная функция, производящая единицы полезности. Верно?)

3. Покажите эквивалентность условий первого порядка задач (16.E.1) и (16.F.1) из учебника MWG (Mas-Colell, Andreu, Michael Dennis Whinston, and Jerry R. Green. Microeconomic theory. Vol. 1. New York: Oxford university press, 1995). При каких условиях на функции полезности эти две задачи приведут к одному и тому же решению? Обоснуйте свой ответ.
4. Рассмотрим экономику обмена, изображённую на рисунке 15.B.10(a) в MWG.
- Покажите, что вывод из Proposition 17.B.2(v) в MWG нарушается в данном примере. Какое свойство предпочтений (или его отсутствие) отвечает за это?
  - Какой мы можем сделать вывод относительно утверждения второй фундаментальной теоремы благосостояния благодаря этому примеру?
5. (Опционально) Рассмотрим экономику, состоящую из  $I$  потребителей,  $J$  фирм и  $L$  благ. Пусть  $\diamond_i, X_i, Y_j$  и  $\bar{w}$  определены в стандартных обозначениях. Предположим, что  $X_i = \mathbb{R}_+^L$  для всех  $i$  и существует  $(y_1, \dots, y_J) \in Y_1 \times \dots \times Y_J$ , такой что

$$\bar{w} + \sum_{j=1}^J y_j \gg 0.$$

Пусть предпочтения каждого потребителя непрерывны и строго монотонны. Пусть  $p = 0$ ,  $(x^*, y^*)$  и  $(w_1, \dots, w_J)$  обозначают цены, распределение и уровни богатства в квази-равновесии с трансферами соответственно.

- Покажите, что  $p \geq 0$ . (Подсказка. Это просто следует из “квази” условия максимизации полезности.)
- Покажите, что существует такой потребитель  $i_0$ , что  $w_{i_0} > 0$ . (Подсказка. Используйте условие  $\bar{w} + \sum_{j=1}^J y_j \gg 0$ , определение квази-равновесия и то, что  $p \geq 0$  и  $p = 0$ .)
- Покажите, что  $x_{i_0}^*$  максимизирует полезность потребителя  $i_0$  на бюджетном множестве  $B_{i_0}(p, w_{i_0})$ . (Подсказка. Предположите, от противного, что существует такой  $x_{i_0} \in B_{i_0}(p, w_{i_0})$ , что  $x_{i_0} \succ_{i_0} x_{i_0}^*$ . Заметим, что  $p x_{i_0} = w_{i_0} > 0$ , и, следовательно,  $p(1 - \varepsilon)x_{i_0} < w_{i_0}$  для любого  $\varepsilon > 0$ . Используйте непрерывность  $\diamond_{i_0}$ , чтобы получить противоречие квази условию максимизации полезности.)
- Покажите, что  $p$  строго положительна. (Подсказка.  $\diamond_{i_0}$  строго монотонна. Используйте (с).)
- Покажите, что это квази-равновесие является равновесием. То есть для любого потребителя  $i$  набор  $x_i^*$  максимизирует  $\diamond_i$  на  $B_i(p, w_i)$ . (Подсказка. У нас  $w_i \geq 0$ . (Верно?) Если  $w_i = 0$ , то из  $p \gg 0$  следует, что  $x_i^* = 0$  это единственная точка в бюджетном множестве  $i$ . Если  $w_i > 0$ , мы можем проделать те же шаги, что и в (с).)

### Домашнее задание 4.

1. Предположим, что  $\pi_{11} > \pi_{12}$  в примере 19.C.1 из учебника MWG (Mas-Colell, Andreu, Michael Dennis Whinston, and Jerry R. Green. Microeconomic theory. Vol. 1. New York: Oxford university press, 1995.) Покажите, что Парето-оптимальное распределение лежит под диагональю коробки Эджуорта. Интерпретируйте требование эффективности. Что ещё вы можете сказать о взаимосвязи между  $\pi_{11}/\pi_{21}$ ,  $\pi_{12}/\pi_{22}$  и  $p_1/p_2$  в равновесии Эрроу-Дебрё?
2. Решите упражнение 19.C.4 из MWG. (Замечание: В формулировке есть ошибка, только  $u_2$  является строго вогнутой.)
3. Рассмотрим экономику обмена Эрроу-Дебрё с двумя материальными благами, двумя состояниями мира и двумя потребителями. Функции полезности Бернулли потребителей зависят от состояния мира и идентичны:

$$u_1(x_{s1}) = \frac{1}{2} \ln x_{1s1} + \frac{1}{2} \ln x_{2s1} \quad u_2(x_{s2}) = \frac{1}{2} \ln x_{1s2} + \frac{1}{2} \ln x_{2s2}.$$

Здесь  $x_{si} = (x_{1si}, x_{2si})$  обозначает потребительский набор потребителя  $i$  в состоянии мира  $s$ . Потребитель 1 приписывает вероятность  $1/4$  состоянию 1, а потребитель 2 приписывает вероятность  $3/4$  состоянию 1. Векторы потребительских запасов даны:

$$\omega_1 = (\omega_{111}, \omega_{211}, \omega_{121}, \omega_{221}) = (12, 4, 0, 0),$$

$$\omega_2 = (\omega_{112}, \omega_{212}, \omega_{122}, \omega_{222}) = (0, 0, 4, 12).$$

Как обычно,  $\omega_{\xi si}$  обозначает запас блага  $\xi$  у потребителя  $i$  в состоянии мира  $s$ . Найдите равновесие Эрроу-Дебрё в данной модели. Вдобавок к этому, посчитайте равновесие Раднера аналогичной модели последовательной торговли с двумя Эрроу-активами (Arrow securities), выраженными в единицах материального блага 1.

4. Рассмотрим стандартную модель последовательного обмена с двумя материальными благами, двумя состояниями мира, двумя потребителями и двумя Эрроу-активами. Функции полезности Бернулли потребителей не зависят от состояния мира:

$$u_1(x_{s1}) = \ln x_{1s1} + 2 \ln x_{2s1} \quad u_2(x_{s2}) = 2 \ln x_{1s2} + \ln x_{2s2}.$$

Здесь  $x_{si} = (x_{1si}, x_{2si})$  обозначает потребительский набор потребителя  $i$  в состоянии мира  $s = 1, 2$ . Оба потребителя считают, что два состояния мира равновероятны. Вектора потребительских запасов равны друг другу:

$$\omega_i = (\omega_{11i}, \omega_{21i}, \omega_{12i}, \omega_{22i}) = (6, 6, 3, 3) \quad \text{для } i = 1, 2,$$

где  $\omega_{\xi si}$  обозначает запас блага  $\xi$  у потребителя  $i$  в состоянии мира  $s$ . Найдите равновесие Раднера в данной модели.

5. Пусть  $(x^*, z^*, p, q)$  обозначает равновесие Раднера в модели последовательной торговли с  $S$  Эрроу-активами,  $L$  материальными благами и  $I$  потребителями. Предположим, что и спот-цены  $p = (p_s) \in R^{LS}$ , и цены активов  $q = (q_s) \in R^S$  являются строго положительными. Пусть для каждого состояния мира  $s$  есть  $\eta_s$ , такое что  $q_s = \eta_s p_s$ . Покажите, что  $(x^*, \tilde{p})$  является равновесием Эрроу-Дебрё соответствующей модели Эрроу-Дебрё с одномоментной торговлей, где  $\tilde{p} = (\tilde{p}_s)$  задаётся как  $\tilde{p}_s = \eta_s p_s$  для каждой  $s$ . (Подсказка. Вам необходимо проверить, что  $B_i^R(p, q) = B_i^{AD}(\tilde{p})$  для любого потребителя  $i$ . Когда вы показываете, что  $B_i^R(p, q) \subseteq B_i^{AD}(\tilde{p})$ , будет проще, если вы умножите бюджетное ограничение на спот-рынке в состоянии мира  $s$  на  $\eta_s$ .)

### Домашнее задание 5.

- Рассмотрим модифицированную версию задачи 3 из домашнего задания 4. Пусть в экономике есть два актива, заданных векторами доходности  $r_1 = (2, 1)$  и  $r_2 = (1, 2)$  соответственно. Как обычно,  $s$ -ая координата вектора  $r_k$  отвечает за количество блага 1, которое актив  $k$  выплатит в состоянии мира  $s$  (для  $k = 1, 2$  и  $s = 1, 2$ ). Найдите равновесие Раднера в соответствующей модели последовательного обмена.
  - Модифицируйте задачу 4 в домашнем задании 4 таким же образом и найдите равновесие Раднера.
  - Если в пункте (b) мы добавим в экономику ещё один актив, заданный вектором доходности  $r_3 \in \mathbb{R}^2$ , как бы вы посчитали его равновесную цену?
- Опишите, как равновесие Раднера в модели последовательного обмена с полным рынком активов может быть конвертировано в равновесие Эрроу-Дебрё.
- Рассмотрим модель последовательного обмена с двумя материальными благами, двумя состояниями мира, двумя потребителями и двумя активами. Векторы доходности активов даны:

$$r_1 = (1, 1) \quad r_2 = (2, 1).$$

Как обычно,  $s$ -ый элемент  $r_k$  отражает, какое количество блага 1 актив  $k$  выплатит в состоянии мира  $s$ . Функции полезности Бернулли потребителей не зависят от состояния мира:

$$u_1(x_{s1}) = (x_{1s1})^{1/2}(x_{2s1})^{1/2} \quad u_2(x_{s2}) = (x_{1s2})^{1/3}(x_{2s2})^{2/3}.$$

Здесь  $x_{si} = (x_{1si}, x_{2si})$  обозначает потребительский набор потребителя  $i$  в состоянии мира  $s = 1, 2$ . Оба потребителя считают, что состояния мира равновероятны.

Пусть  $\omega_i = (\omega_{\xi si})$ , где  $\omega_{\xi si}$  это запас блага  $\xi$  у потребителя  $i$  в состоянии мира  $s$ . Также предположим, что

$$\omega_1 = (\omega_{111}, \omega_{211}, \omega_{121}, \omega_{221}) = (5, 1, 0, 0)$$

$$\omega_2 = (\omega_{112}, \omega_{212}, \omega_{122}, \omega_{222}) = (0, 0, 5, 1)$$

То есть потребитель 1 получает весь запас благ в состоянии 1, а потребитель 2 получает весь запас благ в состоянии 2. Более того, вектор совокупных запасов равен  $(5, 1)$  в обоих состояниях мира.

Посчитайте равновесие Раднера в данной модели.

- Рассмотрим экономику обмена Эрроу-Дебрё с двумя потребителями  $i = 1, 2$ , двумя материальными благами  $\xi = 1, 2$  и двумя состояниями мира  $s = 1, 2$ .



Оба потребителя считают, что состояния мира равновероятны. Функции полезности потребителей зависят от состояния мира и заданы следующим образом:

$$\begin{array}{rcc} & s = 1 & s = 2 \\ \text{потребитель 1} & \ln x_{111} + 2 \ln x_{211} & \ln x_{121} + 2 \ln x_{221} \\ \text{потребитель 2} & \ln x_{112} + \ln x_{212} & \ln x_{122} + 2 \ln x_{222} \end{array}$$

Здесь  $x_{\ell si}$  обозначает потребление блага  $\ell$  потребителем  $i$  в состоянии мира  $s$ . Как обычно,  $\omega_i := (\omega_{\ell si})$  обозначает зависящий от состояния мира запас благ у потребителя  $i$ , тогда как  $\bar{\omega}_{\ell s} > 0$  обозначает совокупный запас блага  $\ell$  в состоянии мира  $s$ . Кроме того,  $p = (p_{\ell s})$  обозначает вектор цен во внутреннем равновесии Эрроу-Дебрё. Установим  $p_{11} = 1$ .

(a) Покажите, что  $p_{12} = \bar{\omega}_{11} \bar{\omega}_{12}$  и  $p_{22} = 2\bar{\omega}_{11} \bar{\omega}_{22}$ .

(b) Предположим, что

$$\omega_1 = (\omega_{111}, \omega_{211}, \omega_{121}, \omega_{221}) = (8, 14, 4, 6),$$

$$\omega_2 = (\omega_{112}, \omega_{212}, \omega_{122}, \omega_{222}) = (0, 0, 0, 10).$$

Найдите потребительские планы и цены в равновесии Эрроу-Дебрё.

(c) Опишите, как вы можете трансформировать ваш ответ на пункт (b) в равновесие Раднера для полного рынка активов, характеризующегося матрицей доходностей  $2 \times K$  в форме  $R = [r_1, \dots, r_K]$ , где  $r_k$  отражает доходность актива  $k$  в единицах материального блага 1.

5. (Оptionальное упражнение на доказательство формулы оценки активов) Предположим, существуют  $K$  активов,  $L$  материальных благ и  $S$  состояний мира. Пусть  $r_k = (r_{1k}, \dots, r_{Sk}) \in \mathbb{R}^S$  обозначает вектор доходности актива  $k$  в единицах блага 1. Определим матрицу размерности  $S \times K$  как  $R = [r_1, \dots, r_K]$ . Предположим, что  $r_k > 0$  для любого  $k$  и что в каждом состоянии мира  $s$  существует такой актив  $k$ , что  $r_{sk} > 0$ . Условие отсутствия арбитража записывается как:

$$\diamond z_i \in \mathbb{R}^K \text{ такого, что } qz_i \leq 0 \text{ и } Rz_i > 0.$$

Здесь  $q \in \mathbb{R}^K$  обозначает вектор цен активов, а  $z_i \in \mathbb{R}^S$  это потенциальный портфель для любого заданного индивида  $i$ . В соответствии с условием отсутствия арбитража, из  $r_k > 0$  следует, что  $q_k > 0$  для любого актива  $k$ . Определим  $\Phi \equiv \{Rz_i : z_i \in \mathbb{R}^K, qz_i = 0\}$  и заметим, что  $\Phi$  это линейное подпространство в  $\mathbb{R}^S$ . Докажите шаги, приведённые ниже, следуя подсказкам в скобках:

**Шаг 1.** Существует  $\mu \in \mathbb{R}^S$  с  $\mu > 0$ , что  $\mu\phi = 0$  для любого  $\phi \in \Phi$ . (Подсказка. Условие отсутствия арбитража подразумевает, что линейное подпространство  $\Phi$  не пересекает выпуклое множество  $\mathbb{R}_+^S \setminus \{0\}$ . Разделите эти два

множества с помощью гиперплоскости. То, что  $\mu\phi = 0$  для любого  $\phi \in \Phi$  будет следовать из факта, что  $\Phi$  это линейное пространство. А то, что  $\mu \geq 0$  следует из аргумента, основанного на факте, что  $\phi + \lambda *_{s} \in R^S \setminus \{0\}$  для любого  $\phi \in R^S \setminus \{0\}$ , любого положительного числа  $\lambda$  и любого  $s \in S$ , где  $*_{s}$  обозначает соответствующий единичный вектор.)

**Шаг 2.** При заданном на Шаге 1  $\mu$ , вектор  $\mu R$  принадлежит линейному пространству  $\{\alpha q : \alpha \in R\}$ . (Подсказка. В ином случае мы можем отделить вектор  $\mu R$  от этого пространства. Так как это линейное пространство, то, как и на прошлом шаге, это приводит к такому разделяющему вектору нормали  $z_i \in R^K$ , что  $qz_i = 0$  и  $(\mu R)z_i = \mu(Rz_i) > 0$ . Задание  $\phi \equiv Rz_i$  приводит к противоречию с определением  $\mu$ .)

**Шаг 3.**  $\mu R = \alpha q$  для какой-то  $\alpha > 0$ . Так,  $\hat{\mu} R = q$ , где  $\hat{\mu} = \frac{1}{\alpha} \mu$ . Вывод: существует такой вектор  $\hat{\mu} > 0$ , что  $\hat{\mu} R = q$ . (Подсказка. В соответствии с Шагом 2, существует такая  $\alpha \in R$ , что  $\mu R = \alpha q$ . Заметим, что  $\mu R > 0$  и  $q \gg 0$ . Верно?)

## Микроэкономика 4

### Задания для промежуточной аттестации

Общий вес: 100 баллов.

1. (25 баллов) Начальник  $P$  и агент  $A$  играют в следующую игру. Сначала  $A$  скрытно выбирает уровень усилий по лоббированию  $a \geq 0$ , накладывающий издержки как на  $A$ , так и на  $P$ . Далее реализуется сигнал  $s = a + \theta + u$  видимый для обеих сторон. Вслед за этим  $P$  принимает решение  $x \in (-\infty, +\infty)$ . И наконец,  $P$  получает выигрыш  $-(x - \theta)^2 - ka$ , где  $k > 0$  константа, а  $A$  получает выигрыш  $x - C(a)$ , где  $C(a)$  строго возрастающая и строго выпуклая функция. И  $A$ , и  $P$  максимизируют свой ожидаемый выигрыш с учетом их убеждений относительно стратегии друг друга. Также у них есть общая априорная убежденность относительно случайных величин  $\theta$  и  $u$ :  $\theta$  и  $u$  независимы и нормально распределены со средним 0 и дисперсиями  $V(\theta)$  и  $V(u)$ .

- Пусть  $P$  предполагает, что  $A$  приложит усилие  $\hat{a}$ . Каково апостериорное ожидание  $\theta$  с условием на величину наблюдаемого сигнала  $s$ ? Каков оптимальный выбор  $x$  с учетом его предположений об  $\hat{a}$  и знания  $s$ .
- Какие условия определяют равновесное значение усилия  $a$ ? Как это значение зависит от  $V(\theta)$  и  $V(u)$ ?

В проанализированной выше игре начальник  $P$  не может заранее решить как он отреагирует на сигнал  $s$ , сгенерированный агентом  $A$ . Теперь предположим, что, перед тем как  $A$  выберет  $a$ ,  $P$  обязывается соблюдать правило принятия решения  $x = d + bs$ , где  $d$  и  $b \geq 0$  константы.

- Какое условие определяет оптимальный выбор  $a$  агентом  $A$  при данном правиле принятия решения?
  - Объясните суть компромисса, с поиском которого сталкивается  $P$  при выборе  $b$ . Сравнивая оптимальный выбор  $P$  в случае с обязательством следовать правилу принятия решения (без пересмотра контракта) и оптимальный выбор в случае без обязательств (с пересмотром контракта) в равновесии, выясните в каком случае выбор  $x$  более чувствителен к сигналу  $s$ . Какую зависимость величины  $b$  от  $V(\theta)$ ,  $V(u)$  и  $k$  вы ожидаете? Объясните.
2. (15 баллов) Нейтральный к риску начальник  $P$  заключает контракт о выполнении работ с испытывающим неприязнь к риску агентом  $A$ , который определяет заработную плату  $w$  как функцию от итогового результата работ  $z$ , выполненных агентом  $A$ , а  $z = ex$ , где  $e$  в свою очередь наблюдаемый индивидуально агентом  $A$  уровень усилия, а  $x$  случайный шок, который реализуется после того как  $A$  выбирает уровень усилия. Усилие  $e$  может принимать только два значения, 0 и 1, и издержки, которые несёт  $A$ , равны  $C(e)$ ,

где  $C(1) > C(0)$ .  $x = \bar{x} > 0$  с вероятностью  $p$ , и  $x = \underline{x} < 0$ . Пусть константа  $m > 0$  означает  $p\bar{x} + (1 - p)\underline{x}$ .

При усилении  $e$  агента  $A$  и подписанном контракте  $w(z)$  начальник  $P$  получает  $z - w(z)$ , а агент  $U(w) - C(e)$ , где  $U(w)$  возрастающая и строго вогнутая функция. Если агент не подписывает контракт, то он получает гарантированную полезность  $0$ .

- Если  $P$  хочет мотивировать  $A$  подписать контракт и выбрать  $e = 0$ , то каким ограничениям индивидуальной рациональности и совместности по стимулам должен удовлетворять контракт (то есть  $w(\bar{x})$ ,  $w(0)$ , и  $w(\underline{x})$ )? Какие ожидаемые издержки, связанные с зарплатой, несет  $P$  в случае наилучшего для него контракта? Объясните.
- Ответьте на те же вопросы для  $e = 1$ .
- При каком условии для  $P$  более выгодно использовать наилучший контракт из пункта (b) чем из пункта (a)?
- Теперь пусть случайный шок  $x$  может принимать 3 значения:  $\bar{x} > 0, 0$  и  $\underline{x} < 0$ , со строго положительными вероятностями, такими что ожидаемое значение  $x$  всё еще равно  $m$ . Всё остальное остается неизменным. Сравните (с вычислительными деталями) связанные с зарплатой ожидаемые издержки начальника  $P$  с теми, что получились в (b), если в рамках этой задачи  $P$  хочет мотивировать агента  $A$  выбрать  $e = 1$ .

3. (20 баллов) У продавца имеется одна единица товара, который он может поставить не понеся никаких издержек. Имеется два периода времени:  $t = 1$  и  $t = 2$ . Единственный покупатель в этой экономике может быть двух типов: уверенный и неуверенный. Уверенный покупатель оценивает товар как  $v_s = 1$ . Неуверенный же не может определиться с оценкой, полагая, что в периоде  $t = 1$  она,  $v_u$ , равномерно распределена на  $[0, 2]$ . В периоде  $t = 2$  он узнает оценку, вне зависимости от того, купил он товар в  $t = 1$  или нет. Хранить товар затратно для продавца, он платит  $c > 0$ , если товар не продан в  $t = 1$ . Продавец не знает тип покупателя, предполагая, что с вероятностью  $\lambda < \frac{1}{2}$  покупатель неуверенный. В периоде  $t = 1$ , продавец может сделать предложение: покупатель платит  $p$  за товар, имея при этом возможность вернуть его в  $t = 2$ , получая возмещение  $r$ . Если товар всё еще не продан в  $t = 2$ , то продавец предлагает новую цену  $q$ .

- Если продавец всё еще не продал товар в  $t = 2$ , какую цену он предложит? Рассмотрите 3 возможных случая: он думает, что покупатель уверенный с вероятностью  $1$ , неуверенный с вероятностью  $1$  и неуверенный с вероятностью  $\lambda$ . Покажите, что в любом случае  $q$  будет одно и то же.
- Для данного  $q$  найдите ожидаемую полезность неуверенного покупателя в момент времени  $t = 1$ , если он решил отложить покупку на  $t = 2$ .
- Выпишите полезность уверенного покупателя от покупки товара в  $t = 2$ . Выпишите ожидаемую прибыль продавца, если он в итоге продаст в

$t = 2$ .

- (d) Какова вероятность возврата товара, если неуверенный покупатель соглашается на  $(p, r)$  в  $t = 1$ .
- (e) Какова внешняя альтернатива неуверенного покупателя в  $t = 1$ ? Какова внешняя альтернатива уверенного покупателя? Какие надо наложить условия на  $(p, r)$ , чтобы удостовериться, что оба типа покупателя согласятся на предложение продавца в  $t = 1$ ?
- (f) Напишите ожидаемую прибыль продавца, если оба типа покупателя соглашаются на  $(p, r)$ ?
- (g) Покажите, что ограничение индивидуальной рациональности неуверенного покупателя связывающее (binds).
- (h) Найдите оптимальные  $r$  и  $p$  (помня о том, что  $\lambda < \frac{1}{2}$ ). Какова ожидаемая прибыль продавца в этом случае?
- (i) Интуитивно объясните, почему продавец нуждается в предложении возмещения, и почему изначальный "агностицизм" полезен для неуверенного покупателя.
- (j) Пусть теперь товар может испортиться с вероятностью  $\delta$  (во временном промежутке между 1 и 2 периодами). Какие могут быть изменения в выборе неуверенного покупателя? Выведите новую внешнюю альтернативу и новый оптимальный контракт  $(p(\delta), r(\delta))$ .

#### Вопросы для рассуждения

Постарайтесь быть точными в ваших суждениях. Перед тем как ответить на вопрос, потратьте несколько минут на осмысление ответа. Тезисно запишите ваши основные идеи, и только потом начните писать окончательный вариант ответа.

4. (20 баллов) Менеджер и инвесторы играют в следующую игру. В периоде 0 менеджер публично выбирает как распределить фиксированный объем капитала между краткосрочным и долгосрочным проектами. Если  $k_1$  предоставлен для краткосрочного проекта, то его доходность  $S(k_1)$ , и если  $K - k_1$  предназначен для долгосрочного проекта, то соответственно его доходность  $\theta L(K - k_1)$ . Функции  $S(\cdot)$  и  $L(\cdot)$  строго возрастающие и вогнутые, а  $\theta$ , которая с равными вероятностями может быть  $\theta$  и  $\underline{\theta}$  (где  $\theta > \underline{\theta}$ ), индивидуально наблюдаема менеджером перед тем как начинается игра. В периоде 1, взглянув на то, какую часть капитала  $k_1$  выберет менеджер и какова доходность краткосрочного проекта  $S(k_1)$ , инвесторы обновляют свои убеждения относительно величины  $\theta$ . В периоде 2 долгосрочный проект приносит доход  $\theta L(K - k_1)$ .

Доход менеджера представим как  $V_1 + V_2$ , где  $V_1$  равен апостериорному ожиданию доходностей (вычисляется инвестором в периоде 1) двух проектов, а  $V_2$  это реальная доходность двух проектов (наблюдается во 2 периоде).

- (a) Это игра с наблюдениями (screening game) или сигнализирующая игра (signaling game)? Объясните. Словами опишите каким условиям должно удовлетворять совершенное равновесие по Байесу (PBE)?
- (b) Пусть в разделяющем равновесии (PBE) с наименьшими издержками менеджер искажает выбор  $k_1$  (по сравнению с ситуацией где  $\theta$  публично наблюдаема) с целью повлиять на убеждения инвесторов относительно  $\theta$ . Какой тип менеджера ( $\theta$  или  $\underline{\theta}$ ) будет искажать  $k_1$ , и куда будет направлено это искажение? Объясните.
5. (20 баллов) Джозеф Д. Пистоне - агент нелегальной разведки ФБР, который под псевдонимом Донни Браско в 1970-ых годах внедрился в мафиозную семью Бонанно, криминальную группировку Нью Йорка. Собранные Пистоне улики послужили основанием для более 200 обвинений и более 100 обвинительных приговоров по всей стране. После этой операции мафия стала предъявлять особые требования к новым потенциальным членам семьи - "make his bones" (амер. идиома означающая действия направленные на достижение статуса или уважения, не всегда честным путём) или, иными словами, совершение убийства, прежде чем новобранец станет "своим". Убежденность в том, что внедрённый агент правоохранительных органов не способен на убийство с целью инициации в криминальных кругах, послужила отправной точкой для формирования таких правил отбора.  
Напишите модель, способную объяснить эту историю.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1.

#### 1. Стратегическое сдерживание входа.

Рынок открыт в течение двух периодов, изначально спрос не определён. С вероятностью  $p$  спрос велик ( $H$ ) в двух периодах, с вероятностью  $1 - p$  спрос мал ( $L$ ) в двух периодах. В первом периоде фирма А (the incumbent) одна на рынке. Во втором периоде на рынке всё ещё присутствует фирма А, вторая фирма В (the entrant) решает, войти ли ей или нет, и, если захочет, может основывать своё решение на знании о прибыли фирмы А в первом периоде. Доходность фирмы А в первом периоде ограничена монопольной прибылью ( $M^H$  в случае высокого спроса и  $M^L$  в случае низкого спроса,  $M^L < M^H$ ). Тем не менее, в периоде 1 фирма А может заработать меньше, тайно замедлив темпы производства. Если фирма В входит на рынок, то обе фирмы получают дуопольную прибыль  $D^H$  при высоком спросе и  $D^L$  при низком спросе. При этом  $D^L < 0 < D^H < M^L$ . Если фирма В решает не входить, то она получает 0 во втором периоде, в то время как фирма А получает  $M^L$  или  $M^H$  в зависимости от спроса. Целью фирмы А в начале игры является максимизация суммы прибылей в первом и втором периодах.

- Пусть, спрос публично наблюдаем. Объясните, почему в равновесии фирма А всегда выбирает заработать монопольную прибыль в первом периоде, а фирма В входит на рынок только тогда, когда спрос велик.
- Теперь предположим, что фирма А видит спрос в периоде 1, а фирма В видит спрос только после решения о входе во втором периоде. Объясните, почему в этом варианте игры с неполной информацией не существует совершенного байесовского равновесия, в котором фирма А следует той же стратегии, что и в равновесии пункта (a).
- Пусть  $pD^H - (1 - p)D^L < 0$ . Опишите стратегии и веры (beliefs) в одном из совершенных байесовских равновесий в этой игре информативных сигналов.

#### 2. Пиво и кремовый пирог.

Ник просыпается и понимает, что хочет подраться. Он идёт в местный паб в надежде найти “жертву”. И тут, конечно же, он видит мужчину (которого, кстати говоря, зовут Пол), заказывающего завтрак. Ник раньше видел Пола, но никогда не говорил с ним. Ник знает, что Пол может быть двух типов: Тряпка (Wimp) или Задира (Surly). Задиры всегда рады подраться, и Ник не хочет вступать в бой с таким типом. А вот тряпки слабые и их легко побить, поэтому Ник с радостью бы выместил свою злобу на такой мишени. Как бы там ни было, Ник не знает наверняка какого типа Пол, а только то, что вероятность быть тем или иным типом равна 0.5. Кроме этого, Ник прочитал книгу “Настоящие мужчины не едят кремовые пироги”,

написанную Брюсом Файрстином (Bruce Feirstein), где было написано, что задиры обычно пьют пиво на завтрак (beer), а тряпки предпочитают заказывать кремовый пирог (quiche). Ник следит за тем, что заказывает Пол, и решает драться ли ему или нет. Информация о выигрышах приведена в матрице ниже, где стратегии Ника это столбцы, а стратегии Пола это строки.

	Задира		Тряпка	
	Драться	Оставить	Драться	Оставить
Пирог	0, -2	1, 0	Пирог 1, -1	1, 0
Пиво	0, -2	1, 0	Пиво -1 - c, 1	1 - c, 0

где  $c$  – дополнительные издержки Тряпки при употреблении пива утром.

- Какие условия нужно наложить на  $c$ , чтобы гарантировать существование разделяющего совершенного байесовского равновесия? Опишите (полностью) такое равновесие.
- Для каких значений  $c$  есть объединяющее равновесие, в котором оба типа, Задира и Тряпка, заказывают пиво на завтрак? Опишите (полностью) такое равновесие.
- Удовлетворяет ли равновесие в (b) интуитивному критерию?

### 3. Образование.

Рассмотрим модель информативных сигналов на рынке труда Спенса (Spence). На рынке есть две фирмы и два типа работников,  $\theta_H$  и  $\theta_L$ ,  $0 < \theta_L < \theta_H$ . Вероятность реализации типа  $\theta_H$  задана как  $Pr\{\theta = \theta_H\} = \lambda$  и является публично известной. Работник знает свою производительность (или уровень способностей) и выбирает уровень образования  $e > 0$ . Образование продуктивно, производительность работника типа  $\theta_i$  с образованием  $e$  задана как

$$\theta_i + e$$

Фирмы видят  $e$  и одновременно предлагают работнику зарплату. Затем работник соглашается на наивысшую зарплату.

Выигрыш работника типа  $\theta_i$ ,  $i = L, H$ :

$$w - c(\theta_i, e),$$

где  $c(\theta_i, e)$  – издержки образования для работника с уровнем способностей  $\theta_i$ :

$$c(\theta_i, e) = \frac{e^2}{2\theta_i}$$



Выигрыш фирмы, нанявшей работника типа  $\theta_i$  с образованием  $e$ , которому платит зарплату  $w$ ,

$$\theta_i + e - w$$

Также предположим, что у фирм одни и те же веры (beliefs) относительно производительности работника вне равновесной траектории (off equilibrium path).

- (а) Рассмотрите случай с полной информацией, в котором фирмы видят тип работника. Какими тогда будут зарплаты  $w_L^*$  и  $w_H$  и уровни образования  $e_L^*$  и  $e_L^*$ ?

Теперь, пусть, фирмы видят выбор уровня образования работников, но не их типы.

- (b) Есть ли в этой игре совершенное байесовское равновесие (PBE), которое повторяет случай полной информации (в плане уровня зарплат и образования)? Если да, найдите соответствующие ограничения на множество параметров задачи  $(\theta_H, \theta_L, \lambda)$  и предложите интуитивное объяснение вашего ответа. Если нет, то также объясните почему. Проиллюстрируйте ваш ответ графически на плоскости  $(w, e)$  (не беспокойтесь об излишней точности вашего графика).
- (c) Сформулируйте требование доминирования<sup>1</sup> (dominance requirement) для очищения PBE (PBE refinement). Пусть, множество параметров таково, что множество объединяющих равновесий  $\Omega$ , которое было подвержено очищению требованием доминирования, непусто. Содержит ли это множество такое объединяющее равновесие, в котором у  $\theta_H$  наивысший выигрыш?

#### 4. Экзамены (Опционально).

Карен хотела бы, чтобы её друг Тим сдал экзамены. Тим может выбрать готовиться, неся издержки  $c$ . Если он не готовится, то не сдаст экзамен. Если готовится, то с вероятностью  $\theta$  он сдаст экзамен. Иными словами,  $\theta$  – это уровень способностей Тима. Если Тим сдает экзамен, Карен получает выгоду  $V > 0$ , а Тим получает  $U > 0$ .

Карен предлагает Тиму награду  $b \in [0, V]$ , которую он получит в случае сдачи экзамена. Таким образом, в случае успешной сдачи Карен получит  $V - b$ , 0 в случае провала. Тим получает 0 в случае, если он не готовится, –  $c$  если готовится и не сдаёт,  $U + b - c$ , если готовится и всё-таки сдаёт. Для простоты предположим, что Тим выбирает готовиться всегда, когда ему безразлично готовиться или нет.

Способности Тима изначально неизвестны:  $\theta_H$  с вероятностью  $\alpha$  и  $\theta_L$  с вероятностью  $1 - \alpha$ , где

$$1 > \theta_H > \theta_L > 0, [\alpha\theta_H + (1 - \alpha)\theta_L]U < c < \theta_L(U + V) \text{ и } c < \theta_H U$$

<sup>1</sup>Определение доминирования (dominance) и равновесного доминирования (equilibrium dominance) может быть найдено в Appendix A главы 13 MWG.

Мы будем называть веру Тима относительно его  $\theta$  “уверенностью в себе”. Сначала, пусть, ни один из игроков не наблюдает  $\theta$ . Следовательно, Карен начинает игру с выбора бонуса  $b$ . Тим наблюдает бонус и решает готовиться ли ему.

(а) Какой бонус выберет Карен?

Теперь Карен может видеть уровень способностей  $\theta$  Тима, а Тим не может. Следовательно, Природа делает первый ход и выбирает  $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$ . Затем Карен наблюдает  $\theta$  и предлагает  $b_H$  (если  $\theta = \theta_H$ ) или  $b_L$  (если  $\theta = \theta_L$ ). Затем Тим наблюдает  $b$ , но не  $\theta$ , и выбирает готовиться или нет. Мы заинтересованы в поиске совершенного байесовского-нэш равновесия (Perfect Bayesian Nash Equilibrium) в чистых стратегиях.

(b) Покажите, что не существует разделяющего равновесия, а именно,  $b_L^* = b_H^*$  в любом равновесии.

(c) Выполняется ли в этом случае условие стандартной сортировки (standard sorting) (простого скрещивания (single crossing))?

Теперь, пусть, Карен также (помимо бонуса  $b \geq 0$ ) предлагает Тиму безусловный подарок  $w > 0$ . Следовательно она платит Тиму  $b + w$ , если он сдаёт, и  $w$ , если он не сдаёт. Так, Карен предлагает  $(w_H, b_H)$ , когда видит  $\theta_H$ , и  $(w_L, b_L)$ , когда видит  $\theta_L$ . Мы заинтересованы в поиске разделяющего равновесия.

(d) Покажите, что  $w_L^* = 0$  и  $b_L^* = (c/\theta_L) - U$  в любом разделяющем равновесии. Покажите, что вместе с  $w_H^* = c - \theta_H U$  и  $b_H^* = 0$  эти значения образуют равновесие.

(e) Кратко проинтерпретируйте этот результат.

##### 5. Веры (макс. 500 слов).

Анализ разделяющего равновесия в игре информативных сигналов (signaling game) должен определять веры (beliefs) получателя сигнала, причем сигнал мог быть посланным не на равновесной траектории (equilibrium path). Подобные веры произвольны, а следовательно произвольны и выводы, сделанные на их основе. Каково ваше мнение по этому вопросу?

##### 6. Неравенство зарплат (макс. 500 слов).

Предположим, что доступность университетского образования становится в меньшей степени зависимой от богатства или социального класса. Используя модель информативных сигналов образования, предскажите, как может измениться неравенство зарплат среди различных возрастных групп.

## Домашнее задание 2.

### 1. Доктор и пациент.

Рассмотрим модель информативных сигналов с необязывающим разговором (cheap talk) аля модель Кроуфорда и Собела (Crawford&Sobel (1982)). Предположим, имеется пациент, который плохо себя чувствует и идёт на приём к врачу. Доктор должен решить в каком лечении  $a$  нуждается пациент. Тип лечения зависит от состояния здоровья пациента  $\theta$ , лично наблюдаемого пациентом. Априорная вера (prior belief) доктора относительно состояния здоровья пациента -  $\theta \sim U[0, 1]$ . Пациент посылает ничего не стоящий, не связывающий и не проверяемый сигнал  $s \in [0, 1]$  о своём здоровье (т.е. объясняет как он себя чувствует). Доктора волнует его репутация, поэтому он хочет предписать подходящее лечение:

$U^D(a, \theta) = -(a - \theta)^2$ . Но, будучи ипохондриком, пациент хочет, чтобы его "перелечили":  $U^P(a, \theta) = -(a + (b + \theta))^2$ , где  $b > 0$  склонность к излишнему лечению.

- Пусть  $b$  такое, что существует двух-дивизионное равновесие (2-partitional) ( $p=2$ ). Охарактеризуйте это равновесие.
- При каких условиях существует это равновесие?
- Является ли это равновесие единственным? Если да, то объясните почему. Если нет, то опишите другое(ие) равновесие(ия).
- Посчитайте ожидаемые выигрыши доктора и пациента. Как меняются выигрыши с изменением  $b$ ?

### 2. Рынок труда.

Есть два типа рабочих на рынке труда,  $i = 1, 2$ . Рабочий типа  $i$  имеет следующую функцию полезности

$$u_i = (w, x) = w - c_i(x),$$

где  $w$  это зарплата рабочего,  $x$  это благо, которое он производит, а  $c_i(x)$  выпуклая возрастающая функция издержек,  $c'_1(x) < c'_2(x)$ ,  $c'_i(\infty) = \infty$  для  $i = 1, 2$ . Доля рабочих первого типа равна  $\lambda$ .

- Пусть есть единственная нанимающая фирма на рынке, и она не наблюдает тип рабочего. Прибыль фирмы задана величиной выпуска с вычетом заработной платы

$$\pi = x - w$$

Предположим, что минимальная заработная плата для обоих типов рабочих 0. Опишите монополистическое самоотбирающее (screening) контакты  $(w_i, x_i)$ , которые предлагает фирма.

- (b) Теперь, пусть, на рынке множество фирм, и ни одна из них не наблюдает тип рабочего. Фирмы соревнуются в наёме рабочих. Опишите конкурентное самоотбирающее равновесие Нэша, совершенное по подыграм (Subgame perfect Nash Equilibrium - SPNE).
- (c) Как бы изменились ваши ответы в (a) и (b), если бы фирмы могли наблюдать тип рабочего? Почему первое наилучшее (first best) решение может (или не может) быть достигнуто в каждом из этих сценариев?
- (d) Предположим, что  $c_i(x) = \frac{i}{2}x^2$ ,  $i = 1, 2$  и  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Выведите уровни выпуска и зарплат в монополистической и конкурентной проблемах с наблюдаемыми и ненаблюдаемыми типами рабочих (т.е. (a)-(c)).

### 3. Страхование.

Рассмотрите конкурентную модель самоотбора на страховом рынке с двумя типами потребителей  $L$  и  $H$ . У всех рабочих есть изначальное богатство  $W > 0$ , и они могут столкнуться с утратой  $d > 0$ ,  $d < W$ . Вероятность утраты для типа  $L$  равна  $p_L$ , а для  $H$  равна  $p_H$ , где  $p_H > p_L$ . Множество конкурирующих страховых компаний предлагают каждому потребителю страховые контракты против утраты. Вероятность утраты и функция полезности обоих типов потребителей известны для всех участников.

Для пунктов (a) и (b) предположите, что все потребители имеют одну и ту же строго вогнутую (Бернулевскую) полезность от богатства  $u(W)$ ,  $u'(W) < 0$  и  $u''(W) < 0$ . Таким образом, типы потребителей различаются только вероятностью утраты.

- (a) Пусть типы потребителей публично наблюдаемы. Нарисуйте график, отражающий равновесный результат этой модели<sup>1</sup>. Объясните. Выпишите уровни полезности, предложенные каждому типу потребителя в этом равновесии.
- (b) Теперь предположим, что типы потребителей известны только самим потребителям. Нарисуйте график, отражающий разделяющее равновесие в этой модели. Объясните логику вашего графика. Сравните этот результат с результатом (a) и выскажите ваше мнение по поводу источника разницы/сходства.
- (c) Теперь, пусть, потребители типа  $H$  испытывают большую неприязнь к риску и имеют функцию полезности  $v(W)$  вместо  $u(W)$ . Как и выше, вероятности утраты и функции полезности обоих типов потребителей общеизвестны, но типы известны только потребителям. Нарисуйте еще один график, чтобы показать влияние изменения функции полезности на контракты в разделяющем равновесии. Предложите интуитивное объяснение почему это изменение функции полезности понижает или

<sup>1</sup> Совет: используйте следующую систему координат: богатство (после страховки) потребителя в благоприятном состоянии природы - горизонтальная ось; богатство (после страховки) потребителя в неблагоприятном состоянии природы - вертикальная ось.

повышает полезность обоих типов в разделяющем равновесии<sup>2</sup>.

4. *Продуктивные задачи (Опционально).*

Расширьте модель самоотбора на рынке труда, которая была на 8 лекции, так, чтобы задачи были продуктивными. Предположите, что работник типа  $\theta$  производит  $\theta(1 + \mu t)$  единиц товара, когда он имеет задание  $t$ , а  $\mu > 0$ <sup>3</sup>. Определите SPNE в этой модели.

5. *Пациент (снова) (макс. 500 слов).*

Предположим, что пациент-ипохондрик из задачи 1 является профессиональным бегуном. Последние два года пациент тренировался для очень важного забега и с нетерпением его ждёт. Для того, чтобы участвовать в этой гонке, он должен доказать Организаторам гонки, что достаточно здоров. Пусть на приёме у врача-хирурга также присутствует один из Организаторов. Как выдумаете, что произойдёт с качеством информации, которую сообщает пациент?

6. *Отсутствие равновесия (макс. 500 слов).*

В рассмотренной в классе модели самоотбора на рынке труда мы обнаружили, что объединяющий (pooling) контракт не являлся равновесием, потому что фирма могла зарабатывать деньги, пропуская кандидатов хорошего типа. Мы также видели, что при некоторых условиях разделяющее равновесие было хуже чем объединяющий контракт. Не озадачивает ли вас этот результат? Как бы мы могли изменить модель, чтобы получить более разумные предсказания?

<sup>2</sup>Совет: вы можете понимать неприязнь к риску в следующем смысле: агент с полезностью  $v(\cdot)$  имеет большую неприязнь к риску чем агент с  $u(\cdot)$ , если эквивалент надежности (certainty equivalent) лотереи В с полезностью  $v(\cdot)$  ниже эквивалента надежности той же лотереи с полезностью  $u(\cdot)$ . Другими словами, если агент с  $u(\cdot)$  безразличен между эквивалентом полезности А и лотереей В, агент с большей неприязнью риска ( $v(\cdot)$ ) строго предпочитает выбрать А из А и В.

<sup>3</sup>Помните, что в классе мы рассматривали случай, где работник типа  $\theta$  производит  $\theta$ .

### Домашнее задание 3.

#### 1. Неблагоприятный отбор с неделимым благом.

Рассмотрите модель, которую мы обсуждали в классе, но где агент может производить 0 или 1 единицу товара. Оценка одной единицы товара принципалом равна  $S$ . Издержки агента по производству одной единицы товара равны  $\theta$ , которая принимает два значения:  $\underline{\theta}$  с вероятностью  $v$  и  $\bar{\theta}$  с вероятностью  $1 - v$ ,  $\bar{\theta} = \bar{\theta} - \underline{\theta} > 0$ . Тогда агент с издержками  $\theta$  производит одну единицу товара, принципал получает  $S - t$ , а агент  $t - \theta$ , где  $t$  трансферт от принципала к агенту. Отсутствие производства соответствует отсутствию издержек и ценности для принципала. Производство всегда эффективно:  $S > \theta$ . Минимальная полезность агента 0.

В начале периода принципал предлагает выбор:  $\{(p, \bar{t}), (\bar{p}, \underline{t})\}$ , где  $p$  и  $\bar{p}$  вероятности торгов с агентом, у которого низкие и высокие издержки, соответственно (заметьте, что трансферт будет сделан вне зависимости от того состоится торг или нет).

- Найдите первое наилучшее решение (first best).
- Найдите второе наилучшее решение (second best).
- Может ли принципал реплицировать второе наилучшее решение более простым контрактом? Что это за контракт?

#### 2. Неблагоприятный отбор покупателем, обладающим частной информацией.

Рассмотрим еще один стандартный случай неблагоприятного отбора: продавец, который знает издержки, продает товар покупателю, который частным образом знает свою оценку (valuation).

Издержки принципала для  $q$  единиц товара (или для уровня качества  $q$ ) равны  $c(q)$  и  $c^f(q) > 0$ ,  $c^{ff}(q) > 0$ ,  $c(0) = 0$ . Полезность принципала равна  $V = t - c(q)$ . Оценка товара агентом равна  $\theta u(q)$ , где  $u^f(q) > 0$ ,  $u^{ff}(q) < 0$ ,  $u(0) = 0$  и  $\theta = \underline{\theta}$  с вероятностью  $v$ , а  $\theta = \bar{\theta}$  с вероятностью  $1 - v$ . Обозначим  $\bar{\theta} = \bar{\theta} - \underline{\theta} > 0$ . Полезность агента  $U = \theta u(q) - t$ .

- Найдите первое наилучшее решение.
- Проверьте условие Спенса-Мирлиса (Spence-Mirlees condition).
- Найдите второе наилучшее решение.
- Когда оптимально "блокировать" ("shut-down") агента с низкой оценкой?

#### 3. Одалживание и неблагоприятный отбор.

Есть континуум нейтральных к риску заёмщиков без личного богатства и с ограниченной ответственностью. Доля  $v$  первого типа заёмщиков имеют проекты с гарантированной доходностью  $h$  при инвестициях равных 1. Доля  $1 - v$  второго типа заёмщиков имеют (стохастически независимые) проекты,

приносящие  $h$  с вероятностью  $\theta \in (0, 1)$  и 0 с вероятностью  $1 - \theta$ , при инвестициях равных 1. Если заёмщик не берёт в долг, то получает минимальную полезность  $u$ .

Есть единственный нейтральный к риску банк доступный для кредитования, издержки финансирования которого равны  $r$ . Банк предлагает контракты, чтобы максимизировать свою ожидаемую прибыль. Для простоты предположим, что все проекты социально ценные, т.е.

$$\theta h > r + u$$

- (a) Объясните, почему нет потери общности при рассмотрении меню контрактов  $\{(R_1, P_1), (R_2, P_2)\}$ , где  $P_i$  это вероятность получения кредита, а  $R_i$  это выплата банку, когда проект удачный, если заёмщик говорит, что он типа  $i$ .
- (b) Запишите максимизационную задачу банка, который выбирает меню  $\{(R_1, P_1), (R_2, P_2)\}$ , чтобы максимизировать свою ожидаемую прибыль, с учётом ограничений участия и ограничений совместимости по стимулам заёмщика (для простоты предположим, что если заёмщик запрашивает кредит, он теряет свою внешнюю возможность  $u$ ).
- (c) Покажите, что оптимальный контракт предполагает неслучайное размещение кредитов (т.е.  $P_i$  равна либо 0, либо 1,  $i = 1, 2$ ). Опишите оптимальный контракт. Какие у него свойства? Нарисуйте кривые безразличия (в пространстве  $(R, P)$ ) и посмотрите, выполняется ли условие Спенса-Мирлиса. Чтобы ответить на этот вопрос, вам понадобится более общее определение условия Спенса-Мирлиса. Пусть  $U$  полезность заёмщика, тогда условия однократного скрещивания (single crossing condition) говорит, что  $\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial U}{\partial P} / \frac{\partial U}{\partial R} \right)$  имеет постоянный знак.

#### 4. Коррупционная игра (опционально).

Рассмотрим администрацию, которая, как предполагается, с некоторой задержкой должна оказать определённую услугу горожанам (например, выдача паспорта, пропускного удостоверения). При нормально функционирующей администрации горожане получают полезность  $u_0$ , которая зависит от того, как они оценивают время.

Приложив дополнительное усилие, чиновник может предоставить услугу с более короткой задержкой. Пусть  $q$  это уменьшение задержки, издержки чиновника при этом  $\frac{(q-Q)^2}{2}$ , где  $Q$  постоянно.

Также предположим, что есть доля  $v$  горожан первого типа и  $1 - v$  второго типа, которые получают дополнительную полезность от уменьшения задержки  $\theta q$  и  $\theta$ . Горожане хотят подкупить чиновника, чтобы уменьшить задержку.

Опишите оптимальный подкупной контракт, который предложит чиновник горожанам.

5. *Гибкость (макс. 500 слов).*

Поскольку гибкость всегда хороша, работодатель, который не знает производительность работника, получит выгоду, если адаптирует контракт после того как работник покажет свою производительность. Так ли это?

6. *At your disservice (макс. 500 слов).*

Не хочу жаловаться, но самым неприятным (как бы не сказать, что самым пугающим) моментом обеда была встреча с самым грубым барменом, каким я когда-либо сталкивался - и я не думаю, что это случайность. Ресторан известен своей превосходной, уточнённой итальянской кухней и, соответственно, своими ценами. Романтический ужин на двоих стоит около 150\$, плюс, не забудем добавить, вино, тщательно выбранное из размером с Библию меню. Даже если вы возьмёте самое дешёвое основное блюдо и глоток воды, то этот скромный заказ обойдётся вам в 15\$.

Или же вы можете присесть у барной стойки или за столиком рядом с баром. И там еда также превосходная: вы можете насладиться питательными, мягкими свинными фрикадельками, гнездящимися на подушечках лёгкой поленты, примерно за 8\$. Подаваемое там роскошное рагу из телятины стоит вдвое дешевле чем паста в основном ресторане.

Звучит слишком хорошо, чтобы быть правдой, и, я боюсь, в этом есть доля здравого смысла. Чтобы получить еду, вы должны миновать принимающего заказы бармена, больше похожего на злодея из фильмов про Бонда, чем на бонвивана (*Bond villain - bon vivant*, игра слов). Поход в бар - это всё равно что рассмеяться перед лицом страха. Бармен приветствует меня с теплотой Трансильванского дворецкого из малобюджетной киноленты. Он с зловещей усмешкой кидает меню на мой стол. И довольно устойчиво игнорирует мои попытки заказать. Когда в очередной раз он проходит мимо, моя попутчица шепчет мне, что такие татуировки он мог набить только в российской тюрьме. Думаю, она шутит, но, честно говоря, не могу быть полностью уверен в этом.





Возможно, что мужчина случайно получил эту работу, и, позже, прочитав эту заметку, владелец ресторана скажет, - "Игорь, ты уволен." По правде говоря, это звучит не очень убедительно. Я думаю, что Игорь - это часть глобального плана. Один ресторанный критик описал предыдущего бармена как бывшего налогового проверяющего. "Язвительный" - качество, по всей видимости, являющееся необходимым при отборе кандидатов. И наверняка есть в описании вакансии.

Зачем ресторану вдруг понадобилось портить впечатление от обеда?

### Домашнее задание 4.

1. *Кредитный рынок.* У нейтрального к риску предпринимателя есть проект, который для запуска требует  $K$ . Если проект будет успешным, он принесет прибыль  $R$ , а если провальным, то прибыль будет нулевая. Вероятность успеха зависит от уровня усилий предпринимателя  $e \in [0, 1]$ , а издержки от этих усилий  $\frac{e^2}{2}$ . Он ищет инвестора для финансирования проекта. Таким образом ожидаемая прибыль предпринимателя и инвестора может быть записана как  $\Pi_E = e(R - r) - \frac{e^2}{2}$  и  $\Pi_I = er - K$ , соответственно. Пусть

предприниматель

делает предложение "прими или оставь при этом внешняя альтернатива инвестора 0. Это эквивалентно предположению того, что инвестор предлагает контракт на рынке с совершенной конкуренцией. Пусть так же  $R^2 > 4K$ .

- Предположим, что уровень усилий контрактуемый. Выведите первые наилучшие (first-best)  $e^{FB}$  и  $r^{FB}$ .
- Теперь, пусть, уровень усилий неконтрактуем. Найдите оптимальные  $e^*$  и  $r^*$ .
- Предположим, что у предпринимателя изначально есть богатство  $w \in [0, K]$ . Таким образом, он будет инвестировать собственные накопления  $w$  и занимать  $K - w$  у инвестора. Запишите ожидаемую полезность предпринимателя  $V(w)$ . Покажите, что она возрастает и вогнута в  $w$ . Проинтерпретируйте.

2. *Правило возрастающих обязательств.*

Рассмотрим отношения кредитор-заёмщик в контексте постконтрактного оппортунизма. Риск-нейтральный заёмщик хочет занять  $I$  у кредитора для финансирования проекта с гарантированным доходом  $V$ . С вероятностью  $1 - e$  может навредить третьей стороне. Уровень мер предосторожности  $e$  порождает издержки для заемщика  $\psi(e)$ , ( $\psi^f > 0, \psi_{-}^{ff} > 0, \psi^{fff} > 0$ ). Вред имеет величину  $h$ . Финансовый контракт - это пара  $(\underline{t}, \bar{t})$ , где  $\underline{t}$  и  $\bar{t}$  компенсационные выплаты банку если нет вреда или есть вред для окружающей среды, соответственно.

- Предположим,  $e$  наблюдаем. Посчитайте первое наилучшее (first-best) значение уровня мер предосторожности и предположите, что проект социально значим, когда процентная ставка равна  $r$ .
- Пусть, теперь  $e$  ненаблюдаемый. Мы предполагаем, что банк конкурентноспособный, а заемщик имеет существенные обязательства. Покажите, что первый наилучший контракт всё еще реализован, если в случае несчастного случая банк будет обязан возместить третьей стороне величину ущерба  $h$ .
- Предположим, что банк должен возместить третьей стороне  $c < h$ . Обозначим изначально активы заемщика как  $w$ . Покажите, что по мере уменьшения  $w$  первое наилучшее решение не может быть реализовано.

- (d) Найдите второй наилучший оптимальный уровень усилий, который максимизирует ожидаемый выигрыш заемщика с учетом выполнения ограничения банка на нулевую прибыль, ограничение совместимости со стимулами заемщика и его ограничения ограниченной ответственности.
- (e) Покажите, что увеличение уровня ответственности банка сведёт к уменьшению ожидаемого благосостояния.
- (f) Покажите, что этот результат не верен, если банк является монополией.

### 3. *Контрактирование под принуждением (опционально).*

Фирма желает нанять агента. Агент имеет ограниченную ответственность, поэтому его зарплата неотрицательна, но фирма может определённым образом наказать его за плохое выполнение обязанностей (например, унижить, оскорбить). Также, покупая оружие для нападков и террора, фирма может угрозами снизить привлекательность внешней возможности работника. Точнее, хронологическая последовательность действий такова:

- Фирма выбирает уровень вооружённости  $g$ , неся издержки  $k(g)$ .
- Фирма предлагает агенту контракт  $(w(y), p(y))$ , где  $y \in \{L, H\} = \{0, 1\}$  произведенное благо,  $w \geq 0$  зарплата,  $p \geq 0$  уровень неденежного наказания. Если агент отказывается от предложенного контракта, он получает  $\bar{u} - g$ .
- Если агент соглашается, то он выбирает уровень усилий  $a \in [0, 1]$ , неся издержки  $c(a)$  и повышая производительность фирмы:  $Pr(y = H) = a$ .

Выигрыши фирмы и работника:

$$\Pi = zy - w - k(g)$$

$$U = w - p - c(a)$$

где  $z$  это цена производимого блага. Для простоты положим, что  $k(g)$  и  $c(a)$  возрастающие, вогнутые функции, удовлетворяющие условиям Инады (не нужно будет беспокоиться о краевых проблемах).

- (a) Запишите задачу фирмы с учётом ограничения участия (PC) и ограничения совместимости со стимулами (IC).
- (b) Упростите задачу, используя подход первого наилучшего (first best) решения. Справедлив ли такой подход?
- (c) Докажите, что оптимальным контрактом является  $p_H = 0$  и  $w_L = 0$  и что условие участия связывающее.
- (d) Используйте (IC) и (PC), чтобы записать прибыль следующим образом:

$$\Pi = za - ac(a) + a(1 - c)'a - a\bar{u} + ag - k(g)$$

Далее, предполагаем, что  $\Pi$  вогнутая по  $a$ . Для  $x \in R^m$ ,  $t \in R^n$ , функция  $f(x, t)$  супермодулярна в  $(x, t)$ , если все перекрестные частные производные положительны. Топкис (Topkis) доказал, что если  $f(x, t)$  супермодулярна, тогда оптимальное решение

$$x(t) = \operatorname{argmax}_x f(x, t)$$

возрастает по параметру  $t$ .

- (е) Как оптимальный выбор  $a$  и  $g$ ,  $(a(z, \bar{u}); g(z, \bar{u}))$  зависит от цены блага и величины полезности внешней возможности.

#### 4. Постконтрактный оппортунизм в командах.

Рассмотрим модель Холмстрема (Holmstrom). Имеется  $N > 1$  агентов, которые работают в команде. Они прилагают усилия  $e_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , чтобы совместно произвести благо

$$x(e_1, \dots, e_N),$$

где  $x(e_1, \dots, e_N)$  возрастающая дифференцируемая функция от каждого уровня усилий  $e_i$ . Приложение усилий порождает издержки для агента, которые выражаются функцией  $c(e)$ , возрастающей, дифференцируемой и выпуклой. Каждый агент наблюдает уровень собственных усилий и величину произведенного блага, но не уровень усилий своих коллег, поэтому они не могут заключать контракт на уровень усилий.

- (а) Охарактеризуйте первые наилучшие (то есть в случае полной информации) уровни усилий агентов  $e_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ .
- (б) Предположим, агенты согласились на введение дифференцируемого правила сбалансированного распределения бюджета. Иными словами, агент  $i$  получает  $t_i(x)$ , которое приносит ему выигрыш

$$u_i = t_i(x(e_1, \dots, e_N)) - c(e_i),$$

а все трансферы суммарно истощают весь бюджет

$$\sum_{i=0} t_i(x) = x$$

Есть ли такое правило, которое позволит произвести заранее заданный объем блага  $x = x(e_1^*, \dots, e_N^*)$ ? Подкрепите ответ аналитическим решением. Предложите интуитивное объяснение.

- (с) Пусть, теперь в игре появляется  $N+1$ -ый игрок, принципал, который ничего не производит, но может быть частью распределительного правила. Рассмотрите следующее дифференцируемое распределительное правило:

$$t_i(x) = x - \frac{N-1}{N} x_i(e_1^*, \dots, e_N^*), \quad i = 1, \dots, N$$

$$t_{N+1}(x) = (N-1)(x(e_1^*, \dots, e_N^*) - x)$$

- i. Покажите, что это правило не сбалансировано для  $N$  агентов, но сбалансировано для  $N + 1$  (всех агентов).
  - ii. Позволяет ли это правило достичь эффективного уровня производства? Обоснуйте ваш ответ аналитически.
  - iii. Какова роль принципала? Получает ли принципал выигрыш в равновесии?
- (d) Предположим, что распределительное правило такое же как в (с). Пусть принципал и агент  $k$  могут подписать тайный контракт, который будет максимизировать их совместное богатство. Если быть точнее, этот контракт позволяет агенту  $k$  стать претендентом на совместный доход (то есть агент заплатит фиксированный взнос и будет максимизировать их совместное богатство). Другие агенты не будут знать об их договорённости.
- Предположим, что сначала принципал и агент  $k$  решают вступить ли им в сговор, затем все агенты  $i = 1, \dots, N$ , включая агента  $k$ , выбирают и прилагают усилия, и потом, наконец, идёт распределение согласно правилу (с).
- Чувствительно ли правило (с) к сговору (то есть могут ли агенты произвести заданный объем блага)? Докажите и приведите интуитивное объяснение.

5. *Стекольная корпорация Safelite (макс. 500 слов).*

Стекольная корпорация Safelite устанавливает автомобильное стекло в нескольких небольших ремонтных центрах. В 1994 году было решено ввести сделанную ставку для работников центров. Оплата стала зависеть от объема сделанных работ:  $wage = w + \beta u$ , где  $w$  базовая зарплата,  $u$  количество установленных стекол, а  $\beta$  коэффициент сделанной ставки. До этого работники получали только фиксированную плату.

Какие потенциальные издержки и выгоды породил новый способ оплаты труда? Почему эта стратегия оказалась выгодной для Safelite?

6. *Поездка на Арубу (макс. 500 слов).*

Страдает ли следующая компания от проблем <безбилетника> в отношениях между сотрудниками. Обсудите, почему да или почему нет.



By Scott Adams.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ (слева направо и сверху вниз):

1. НАЧАЛЬНИК (говорит): <Дилберт, я хочу, чтобы вы управляли проектом Уолли, пока он будет в отпуске на Арубе>.

2. НАЧАЛЬНИК (думает): <Пусть начнется игра в перекидывание ответственности>.

3. ДИЛБЕРТ (обращаясь к Уолли): <Разве не на этой неделе всё должно завершиться?>

УОЛЛИ (говорит): <Совпадение>.

4. ДИЛБЕРТ (обращаясь к Уолли): <Возможно, вы смогли бы поменять свои планы>.

УОЛЛИ (держит свой авиабилет и говорит): <Вот, билеты возврату не подлежат!>

5. ДИЛБЕРТ (обращаясь к Уолли): <Если вы не меняете свои планы, значит, проект не является важным>.

УОЛЛИ (думает): <Силен>.

6. ДИЛБЕРТ (обращаясь к начальнику): <Я с удовольствием засуну проект Уолли в самый низ своей груды задач, чтобы он провалился и опозорил Уолли>.

7. ДИЛБЕРТ (обращаясь к Уолли): <На Арубе внимательно присмотритесь к официантам – может быть, это ваша новая профессия>.

8. НАЧАЛЬНИК (думает): <Два бесплатных билета на Арубу – я выиграл>.

Автор рисунков: Скотт Адамс

## Теория вероятностей

### Задания для промежуточной аттестации

Общий вес: 80 баллов.

1. (а) (10 баллов) Графически проиллюстрируйте *неравновесный* вектор цен в экономике, описываемой коробкой Эджуорта, выделив соответствующий излишек спроса и предложение.
- (б) (10 баллов) Сформулируйте версию второй фундаментальной теоремы благосостояния для локально не насыщаемых предпочтений,  $I$  потребителей,  $J$  производителей и  $L$  товаров. (Подсказка. Определения не нужны. В точности формулируйте выводы и все предположения теоремы.)
2. Рассмотрим модель производства  $2 \times 2$  с постоянной отдачей от масштаба. Предположим, что издержки фирм на производство одной единицы выпуска задаются функцией от цен на факторы производства  $w = (w_1, w_2) \gg 0$ :

$$c_1(w) = \frac{w_1}{3/4}^{3/4} \frac{w_2}{1/4}^{1/4}, \quad c_2(w) = \frac{w_1}{1/2}^{1/2} \frac{w_2}{1/2}^{1/2}.$$

Выпуск фирм продаётся на международном рынке по следующим ценам за единицу:

$$p_1 = 4, \quad p_2 = 2\sqrt{3}.$$

Кроме того, совокупный запас факторов 1 и 2 дан соответственно:

$$\bar{z}_1 = 2 + \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \bar{z}_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

- (а) (15 баллов) Посчитайте цены факторов производства, их распределение и выпуск фирм во внутреннем равновесии.
- (б) (5 баллов) При каких значениях  $\bar{z}_1$  и  $\bar{z}_2$  фирма 1 прекратит деятельность в равновесии? Кратко проинтерпретируйте свой ответ и приведите интуицию.
- (с) (5 баллов) Кратко опишите оптимизационный метод для вычисления набора всех эффективных распределений факторов в этой модели, вне зависимости от значений  $p_1$  и  $p_2$ . (Подсказка. Мы обсуждали два связанных метода. Вы можете использовать любой из них. Нет необходимости что-либо вычислять; просто опишите метод.)
3. Рассмотрим стандартную модель последовательного обмена с одним товаром, тремя состояниями мира, тремя *Эрроу активами* (*Arrow securities*) и

двумя потребителями. Пусть  $x_{si}$  обозначает потребление потребителя  $i = 1, 2$  в состоянии мира  $s = 1, 2, 3$ . Функция полезности Бернулли потребителей не зависит от состояния мира и задаётся следующим образом:

$$u_1(x_{s1}) = \sqrt{x_{s1}}, \quad u_2(x_{s2}) = \ln x_{s2}$$

Оба потребителя дают наступлению состояния  $s$  вероятность  $\pi_s$ , где

$$\pi_1 = \frac{1}{6}, \quad \pi_2 = \frac{2}{6}, \quad \pi_3 = \frac{3}{6}$$

Потребители наделены следующими векторами запасов:

$$\omega_1 = (0, 3, 0), \quad \omega_2 = (3, 0, 1).$$

(Как обычно,  $s$ -ый элемент вектора  $\omega_i$  обозначает запас потребителя  $i$  в состоянии  $s$ .) Вопросы (а)-(д) ниже относятся к модели равновесия Раднера.

- (а) (5 баллов) Пусть  $q_s$  обозначает цену  $s$ -ого Эрроу актива, который даёт положительную выплату в состоянии мира  $s$ . Найдите зависимость между  $q_1$  и  $q_2$ . Объясните свой ответ.
- (б) (10 баллов) Нормируем  $q_3$  к 1. Используйте свой ответ к пункту (а), чтобы определить потребительские планы потребителей и портфели активов как функции от  $q_1$ .
- (в) (5 баллов) Посчитайте значение  $q_1$ . Упростите ответ насколько это возможно. (Подсказка. Ответ должен быть числом, а не длинным уравнением. Но это число немного <уродливое>, так как оно иррациональное.)
- (д) (5 баллов) Приведите формулу цены любого дополнительного актива, который можно ввести в эту экономику.
4. (10 баллов) Рассмотрим стандартную модель обмена с неопределённостью,  $S$  состояниями мира и  $L$  товарами. Зафиксируем потребителя  $i$ . Пусть  $B_i^{AD}(p)$  и  $B_i^R(\tilde{p}, \tilde{q})$  обозначают его бюджетное множество (потребительских планов) в моделях Эрроу-Дебрё и Раднера соответственно. Для модели Раднера предположим, что рынок активов состоит из  $S$  Эрроу активов, которые платят в единицах товара 1. При строго положительном векторе цен Эрроу-Дебрё  $p \in \mathbb{R}^{LS}$  докажите, что существуют спот цены  $\tilde{p} \in \mathbb{R}^{LS}$  и цены активов  $\tilde{q} \in \mathbb{R}^S$ , такие что  $B_i^{AD}(p) = B_i^R(\tilde{p}, \tilde{q})$ .



## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1.

Задачи 1-3 относятся к экономике, описываемой коробкой Эджуорта (Edgeworth Box Economy), а задачи 4-5 – к экономике Робинзона Крузо.

1. Графически продемонстрируйте, что если кривые безразличия потребителей толстые (ввиду отсутствия локальной ненасыщаемости (local non-satiation)), то вывод первой фундаментальной теоремы благосостояния может не выполняться. То есть может существовать равновесие, не являющееся оптимальным по Парето.
2. Нормируйте цену блага 1, установив  $p_1 = 1$ . Рассчитайте равновесное значение  $p_2$  и равновесное распределение как функции от параметра  $\alpha \in (0, 1/2)$  для следующих функций полезности и запасов:

$$u_1(x_{11}, x_{21}) = (x_{11})^\alpha (x_{21})^{1-\alpha}, \quad \omega_1 = (2, 1)$$

$$u_2(x_{12}, x_{22}) = (x_{12})^{2\alpha} (x_{22})^{1-2\alpha}, \quad \omega_2 = (2, 1)$$

3. Нормируйте цену блага 1, установив  $p_1 = 1$ . Рассчитайте равновесное значение  $p_2$  и равновесное распределение как функции от параметра  $a > 0$  для следующих функций полезности и запасов:

$$u_1(x_{11}, x_{21}) = x_{11} + x_{21}, \quad \omega_1 = (1, 1)$$

$$u_2(x_{12}, x_{22}) = (x_{12})^{1/2} (x_{22})^{1/2}, \quad \omega_2 = (0, a)$$

(Подсказка. В зависимости от значения  $a$  в равновесии мы имеем либо  $p_2 = 1$ , либо  $p_2 < 1$ . Также верно, что равновесие единственно для любого значения  $a$ , что можно проверить в качестве дополнительного упражнения.)

4. Дайте графический пример, в котором вторая фундаментальная теорема благосостояния не выполняется из-за того, что предпочтения потребителя (Робинзона) не являются выпуклыми. Обоснуйте свой ответ.
5. Найдите равновесные цены, прибыль и потребление для  $u(x_1, x_2) := \ln x_1 + \ln x_2$  и  $f(z) := z^{1/4}$ .

## Домашнее задание 2.

Задачи 1-4 относятся к модели производства  $2 \times 2$  с постоянной отдачей от масштаба.

1. Предположим, что функции производства одной единицы выпуска зависят от цен факторов производства  $w = (w_1, w_2) \gg 0$  и имеют следующий вид:

$$c_1(w) = \frac{w_1^{3/4}}{3/4} \frac{w_2^{1/4}}{1/4},$$

$$c_2(w) = \frac{w_1^{1/4}}{1/4} \frac{w_2^{3/4}}{3/4}.$$

Пусть  $p_1 = 4$  и  $p_2 = \sqrt[4]{4}$  задают цены одной единицы выпуска фирм. Кроме этого, предположим, что суммарные запасы двух факторов производства равны  $\bar{z}_1 = 1 + \frac{1}{3\sqrt{4}}$  и  $\bar{z}_2 = 1 + \sqrt{3}$ . Найдите цены факторов производства и распределение во *внутреннем* равновесии.

2. Предположим, что функции производства одной единицы выпуска зависят от цен факторов производства  $w = (w_1, w_2) \gg 0$  и имеют следующий вид:

$$c_1(w) = \frac{w_1^{2/3}}{2/3} \frac{w_2^{1/3}}{1/3},$$

$$c_2(w) = \frac{w_1^{1/2}}{1/2} \frac{w_2^{1/2}}{1/2}.$$

Пусть

$$p_1 = \frac{6}{2^{2/3}} \quad \text{и} \quad p_2 = 3$$

задают цены одной единицы выпуска фирм. Кроме этого, предположим, что суммарные запасы двух факторов производства равны  $\bar{z}_1 = 2$  и  $\bar{z}_2 = 1$ . Найдите цены факторов производства и распределение в равновесии, в котором фирма 2 прекращает свою деятельность. Проверьте, что решения фирм действительно оптимальны при ценах факторов производства, которые вы вычислили.

3. Предположим, что для  $w = (w_1, w_2) \gg 0$ ,

$$a_{11}(w) := \frac{2}{3w_1} \frac{w_1^{2/3}}{2/3} \frac{w_2^{1/3}}{1/3}$$

$$a_{21}(w) := \frac{1}{3w_2} \frac{w_1^{2/3}}{2/3} \frac{w_2^{1/3}}{1/3}$$

$$a_{12}(w) := \frac{1}{3w_1} \frac{w_1^{1/3}}{1/3} \frac{w_2^{2/3}}{2/3}$$

$$a_{22}(w) := \frac{2}{3w_2} \frac{w_1}{1/3} \frac{w_2}{2/3}^{2/3}$$

где  $a_j(w) := (a_{1j}(w), a_{2j}(w))$  – это условный спрос фирмы  $j$  на факторы производства, соответствующий одной единице выпуска. Предположим, что  $p_1 = p_2 = 1/2$ . Найдите равновесное распределение факторов производства и цены как функции от запасов факторов производства  $\bar{z}_1, \bar{z}_2 > 0$ . (Не забудьте рассмотреть граничные решения, если таковые существуют.)

4. Предполагая, что равновесие внутреннее, графически проиллюстрируйте влияние роста  $p_1$  на равновесное распределение факторов производства и уровни выпуска двух фирм. Детально обоснуйте свой ответ (*Подсказка.* В своём обосновании вам нужно прокомментировать изменение углов наклона векторов спроса на факторы производства. Для этого вы можете использовать (квази)вогнутость  $c_j(w)$  и вывод из теоремы Столпера-Самуэльсона (Stolper-Samuelson). Более того, также выполняется  $a_j(tw) = a_j(w)$  для всех  $t > 0$  и  $w \gg 0$ .)
5. Предположим, что в малой открытой экономике (с закрытыми рынками факторов производства) существуют  $J$  фирм и  $L$  факторов производства. Производственные функции фирм,  $f_1, \dots, f_J$ , не обязательно имеют постоянную отдачу от масштаба. Фирма  $j$  решает следующую задачу:

$$\max_{z_j \geq 0} p_j f_j(z_j) - w z_j.$$

Общественный планировщик, в свою очередь, решает задачу максимизации выручки:

$$\max_{z_1, \dots, z_J} \sum_{j=1}^J p_j f_j(z_j) \quad \text{при ограничении} \quad \sum_{j=1}^J z_j = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_L).$$

Предполагая, что каждая фирма использует положительное количество каждого фактора производства, выведите условия первого порядка для обеих задач. Покажите, что не расточительное (non-wasteful) и достижимое распределение факторов производства  $(z_1, \dots, z_J)$  является равновесным тогда и только тогда, когда оно решает задачу общественного планировщика (предполагая, что производственные функции вогнуты, то есть условия первого порядка необходимы и достаточны). В частности, обоснуйте, как вы можете получить равновесные значения цен факторов производства,  $w^* = (w_1^*, \dots, w_L^*)$ , из задачи планировщика.

*Замечание.* Как известно, существует альтернативная форма задачи максимизации выручки, выраженная в уровнях выпуска  $q_1, \dots, q_J$ . В этом случае мы имеем  $q_j = f_j(z_j)$  и концентрируем внимание на границе эффективности (efficient frontier), то есть границе производственных возможностей. Тем не менее, очевидно, задача максимизации выручки требует эффективного использования ресурсов (иначе, с помощью подходящего перераспределения

факторов производства между фирмами мы можем одновременно увеличить выпуск всех фирм, что подразумевает ещё более высокий уровень выручки). Поэтому мы можем просто решить задачу максимизации выручки при ограничении на ресурсы, не беспокоясь об эффективности.

### Домашнее задание 3.

1. Рассмотрим экономику, описываемую коробкой Эджуорта (Edgeworth box economy), с двумя товарами. Потребительские запасы равны  $\omega_1 := \frac{\sqrt{2}}{2}, 4$ ,  $\omega_2 := \frac{\sqrt{2}}{2}, 5$ . Предположим, что функции полезности двух потребителей заданы следующим образом:

$$u_1(x_1) := x_{11} + (x_{21})^{1/2} \quad u_2(x_2) := \sqrt{8x_{12} + (x_{22})^{1/2}}.$$

- (a) Найдите множество Парето-оптимальных распределений параметрически, как функцию от уровня полезности потребителя 2.
- (b) Для каждого внутреннего Парето-оптимального распределения найдите соответствующее равновесие с трансферами.
2. Пусть  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$  обозначают совокупные запасы двух благ в экономике, описываемой коробкой Эджуорта. Предположим также, что функции полезности двух потребителей заданы следующим образом:

$$u_1(x_1) := (x_{11})^{2/3}(x_{21})^{1/3} \quad u_2(x_2) := (x_{12})^{1/3}(x_{22})^{2/3}.$$

Рассмотрим следующую задачу максимизации благосостояния как функцию от  $\lambda \in (0, 1)$ :

$$\max_{(x_1, x_2)} \lambda u_1(x_1) + (1 - \lambda) u_2(x_2) \quad \text{при } x_{\xi 1} + x_{\xi 2} = \bar{\omega}_\xi \text{ и } x_{\xi i} \geq 0 \text{ для } \xi, i \in \{1, 2\}.$$

Пусть  $(x_1(\lambda), x_2(\lambda))$  обозначает решение, где  $x_i(\lambda) = (x_{1i}(\lambda), x_{2i}(\lambda))$  для  $i = 1, 2$ .

- (a) Предполагая, что решение внутреннее с  $x_i(\lambda) \gg 0$  для  $i = 1, 2$ , используйте условия первого порядка для задачи 1, чтобы посчитать отношения  $\frac{x_{11}(\lambda)}{x_{21}(\lambda)}$  и  $\frac{x_{12}(\lambda)}{x_{22}(\lambda)}$  в зависимости от  $\lambda$ .
- (b) Заметим, что  $\frac{x_{11}(\lambda)}{x_{21}(\lambda)} > \frac{x_{12}(\lambda)}{x_{22}(\lambda)}$  и оба отношения убывают по  $\lambda$ . Какие необходимы дополнительные условия на  $\bar{\omega}_1$ ,  $\bar{\omega}_2$  и  $\lambda$  в задаче 1, чтобы, как вы и предполагали, решение было внутренним? Графически проиллюстрируйте множество внутренних эффективных распределений и объясните роль  $\lambda$  на графике. (Подсказка. Можете применять алгебру для характеристики условия внутренности решения, но это не обязательно. Смотрите ниже.)
- (c) Свяжите задачу максимизации благосостояния из номера 1 с задачей максимизации выручки, рассмотренной в номере 5 из домашнего задания 2 (В конце концов, в целях анализа эффективности функция полезности может рассматриваться как производственная функция, производящая единицы полезности. Верно?)

3. Покажите эквивалентность условий первого порядка задач (16.E.1) и (16.F.1) из учебника MWG (Mas-Colell, Andreu, Michael Dennis Whinston, and Jerry R. Green. Microeconomic theory. Vol. 1. New York: Oxford university press, 1995). При каких условиях на функции полезности эти две задачи приведут к одному и тому же решению? Обоснуйте свой ответ.
4. Рассмотрим экономику обмена, изображённую на рисунке 15.B.10(a) в MWG.
- (a) Покажите, что вывод из Proposition 17.B.2(v) в MWG нарушается в данном примере. Какое свойство предпочтений (или его отсутствие) отвечает за это?
- (b) Какой мы можем сделать вывод относительно утверждения второй фундаментальной теоремы благосостояния благодаря этому примеру?
5. (Опционально) Рассмотрим экономику, состоящую из  $I$  потребителей,  $J$  фирм и  $L$  благ. Пусть  $\diamond_i, X_i, Y_j$  и  $\bar{w}$  определены в стандартных обозначениях. Предположим, что  $X_i = \mathbb{R}_+^L$  для всех  $i$  и существует  $(y_1, \dots, y_J) \in Y_1 \times \dots \times Y_J$ , такой что

$$\bar{w} + \sum_{j=1}^J y_j \gg 0.$$

Пусть предпочтения каждого потребителя непрерывны и строго монотонны. Пускай  $p = 0$ ,  $(x^*, y^*)$  и  $(w_1, \dots, w_J)$  обозначают цены, распределение и уровни богатства в квази-равновесии с трансферами соответственно.

- (a) Покажите, что  $p \geq 0$ . (Подсказка. Это просто следует из “квази” условия максимизации полезности.)
- (b) Покажите, что существует такой потребитель  $i_0$ , что  $w_{i_0} > 0$ . (Подсказка. Используйте условие  $\bar{w} + \sum_{j=1}^J y_j \gg 0$ , определение квази-равновесия и то, что  $p \geq 0$  и  $p = 0$ .)
- (c) Покажите, что  $x_{i_0}^*$  максимизирует полезность потребителя  $i_0$  на бюджетном множестве  $B_{i_0}(p, w_{i_0})$ . (Подсказка. Предположите, от противного, что существует такой  $x_{i_0} \in B_{i_0}(p, w_{i_0})$ , что  $x_{i_0} \succ_{i_0} x_{i_0}^*$ . Заметим, что  $p x_{i_0} = w_{i_0} > 0$ , и, следовательно,  $p(1 - \varepsilon)x_{i_0} < w_{i_0}$  для любого  $\varepsilon > 0$ . Используйте непрерывность  $\diamond_{i_0}$ , чтобы получить противоречие квази условию максимизации полезности.)
- (d) Покажите, что  $p$  строго положительна. (Подсказка.  $\diamond_{i_0}$  строго монотонна. Используйте (c).)
- (e) Покажите, что это квази-равновесие является равновесием. То есть для любого потребителя  $i$  набор  $x_i^*$  максимизирует  $\diamond_i$  на  $B_i(p, w_i)$ . (Подсказка. У нас  $w_i \geq 0$ . (Верно?) Если  $w_i = 0$ , то из  $p \gg 0$  следует, что  $x_i^* = 0$  это единственная точка в бюджетном множестве  $i$ . Если  $w_i > 0$ , мы можем проделать те же шаги, что и в (c).)

### Домашнее задание 4.

1. Предположим, что  $\pi_{11} > \pi_{12}$  в примере 19.C.1 из учебника MWG (Mas-Colell, Andreu, Michael Dennis Whinston, and Jerry R. Green. Microeconomic theory. Vol. 1. New York: Oxford university press, 1995.) Покажите, что Парето-оптимальное распределение лежит под диагональю коробки Эджуорта. Интерпретируйте требование эффективности. Что ещё вы можете сказать о взаимосвязи между  $\pi_{11}/\pi_{21}$ ,  $\pi_{12}/\pi_{22}$  и  $p_1/p_2$  в равновесии Эрроу-Дебрё?
2. Решите упражнение 19.C.4 из MWG. (Замечание: В формулировке есть ошибка, только  $u_2$  является строго вогнутой.)
3. Рассмотрим экономику обмена Эрроу-Дебрё с двумя материальными благами, двумя состояниями мира и двумя потребителями. Функции полезности Бернулли потребителей зависят от состояния мира и идентичны:

$$u_1(x_{s1}) = \frac{1}{2} \ln x_{1s1} + \frac{1}{2} \ln x_{2s1} \quad u_2(x_{s2}) = \frac{1}{2} \ln x_{1s2} + \frac{1}{2} \ln x_{2s2}.$$

Здесь  $x_{si} = (x_{1si}, x_{2si})$  обозначает потребительский набор потребителя  $i$  в состоянии мира  $s$ . Потребитель 1 приписывает вероятность  $1/4$  состоянию 1, а потребитель 2 приписывает вероятность  $3/4$  состоянию 1. Векторы потребительских запасов даны:

$$\omega_1 = (\omega_{111}, \omega_{211}, \omega_{121}, \omega_{221}) = (12, 4, 0, 0),$$

$$\omega_2 = (\omega_{112}, \omega_{212}, \omega_{122}, \omega_{222}) = (0, 0, 4, 12).$$

Как обычно,  $\omega_{\xi si}$  обозначает запас блага  $\xi$  у потребителя  $i$  в состоянии мира  $s$ . Найдите равновесие Эрроу-Дебрё в данной модели. Вдобавок к этому, посчитайте равновесие Раднера аналогичной модели последовательной торговли с двумя Эрроу-активами (Arrow securities), выраженными в единицах материального блага 1.

4. Рассмотрим стандартную модель последовательного обмена с двумя материальными благами, двумя состояниями мира, двумя потребителями и двумя Эрроу-активами. Функции полезности Бернулли потребителей не зависят от состояния мира:

$$u_1(x_{s1}) = \ln x_{1s1} + 2 \ln x_{2s1} \quad u_2(x_{s2}) = 2 \ln x_{1s2} + \ln x_{2s2}.$$

Здесь  $x_{si} = (x_{1si}, x_{2si})$  обозначает потребительский набор потребителя  $i$  в состоянии мира  $s = 1, 2$ . Оба потребителя считают, что два состояния мира равновероятны. Вектора потребительских запасов равны друг другу:

$$\omega_i = (\omega_{11i}, \omega_{21i}, \omega_{12i}, \omega_{22i}) = (6, 6, 3, 3) \quad \text{для } i = 1, 2,$$

где  $\omega_{\xi si}$  обозначает запас блага  $\xi$  у потребителя  $i$  в состоянии мира  $s$ . Найдите равновесие Раднера в данной модели.

5. Пусть  $(x^*, z^*, p, q)$  обозначает равновесие Раднера в модели последовательной торговли с  $S$  Эрроу-активами,  $L$  материальными благами и  $I$  потребителями. Предположим, что и спот-цены  $p = (p_s) \in R^{LS}$ , и цены активов  $q = (q_s) \in R^S$  являются строго положительными. Пусть для каждого состояния мира  $s$  есть  $\eta_s$ , такое что  $q_s = \eta_s p_{1s}$ . Покажите, что  $(x^*, \tilde{p})$  является равновесием Эрроу-Дебрё соответствующей модели Эрроу-Дебрё с одномоментной торговлей, где  $\tilde{p} = (\tilde{p}_s)$  задаётся как  $\tilde{p}_s = \eta_s p_s$  для каждой  $s$ . (Подсказка. Вам необходимо проверить, что  $B_i^R(p, q) = B_i^{AD}(\tilde{p})$  для любого потребителя  $i$ . Когда вы показываете, что  $B_i^R(p, q) \subseteq B_i^{AD}(\tilde{p})$ , будет проще, если вы умножите  $s$  на  $\eta_s$ .)
- бюджетное ограничение на спот-рынке в состоянии мира



### Домашнее задание 5.

1. (а) Рассмотрим модифицированную версию задачи 3 из домашнего задания 4. Пусть в экономике есть два актива, заданных векторами доходности  $r_1 = (2, 1)$  и  $r_2 = (1, 2)$  соответственно. Как обычно,  $s$ -ая координата вектора  $r_k$  отвечает за количество блага 1, которое актив  $k$  выплатит в состоянии мира  $s$  (для  $k = 1, 2$  и  $s = 1, 2$ ). Найдите равновесие Раднера в соответствующей модели последовательного обмена.
  - (b) Модифицируйте задачу 4 в домашнем задании 4 таким же образом и найдите равновесие Раднера.
  - (c) Если в пункте (b) мы добавим в экономику ещё один актив, заданный вектором доходности  $r_3 \in \mathbb{R}^2$ , как бы вы посчитали его равновесную цену?
2. Опишите, как равновесие Раднера в модели последовательного обмена с полным рынком активов может быть конвертировано в равновесие Эрроу-Дебрё.
3. Рассмотрим модель последовательного обмена с двумя материальными благами, двумя состояниями мира, двумя потребителями и двумя активами. Векторы доходности активов даны:

$$r_1 = (1, 1) \quad r_2 = (2, 1).$$

Как обычно,  $s$ -ый элемент  $r_k$  отражает, какое количество блага 1 актив  $k$  выплатит в состоянии мира  $s$ . Функции полезности Бернулли потребителей не зависят от состояния мира:

$$u_1(x_{s1}) = (x_{1s1})^{1/2}(x_{2s1})^{1/2} \quad u_2(x_{s2}) = (x_{1s2})^{1/3}(x_{2s2})^{2/3}.$$

Здесь  $x_{si} = (x_{1si}, x_{2si})$  обозначает потребительский набор потребителя  $i$  в состоянии мира  $s = 1, 2$ . Оба потребителя считают, что состояния мира равновероятны.

Пусть  $\omega_i = (\omega_{\xi si})$ , где  $\omega_{\xi si}$  это запас блага  $\xi$  у потребителя  $i$  в состоянии мира  $s$ . Также предположим, что

$$\omega_1 = (\omega_{111}, \omega_{211}, \omega_{121}, \omega_{221}) = (5, 1, 0, 0)$$

$$\omega_2 = (\omega_{112}, \omega_{212}, \omega_{122}, \omega_{222}) = (0, 0, 5, 1)$$

То есть потребитель 1 получает весь запас благ в состоянии 1, а потребитель 2 получает весь запас благ в состоянии 2. Более того, вектор совокупных запасов равен  $(5, 1)$  в обоих состояниях мира.

Посчитайте равновесие Раднера в данной модели.

4. Рассмотрим экономику обмена Эрроу-Дебрё с двумя потребителями  $i = 1, 2$ , двумя материальными благами  $\xi = 1, 2$  и двумя состояниями мира  $s = 1, 2$ .

Оба потребителя считают, что состояния мира равновероятны. Функции полезности потребителей зависят от состояния мира и заданы следующим образом:

$$\begin{array}{rcc} & s = 1 & s = 2 \\ \text{потребитель 1} & \ln x_{111} + 2 \ln x_{211} & \ln x_{121} + 2 \ln x_{221} \\ \text{потребитель 2} & \ln x_{112} + \ln x_{212} & \ln x_{122} + 2 \ln x_{222} \end{array}$$

Здесь  $x_{\xi si}$  обозначает потребление блага  $\xi$  потребителем  $i$  в состоянии мира  $s$ . Как обычно,  $\omega_i := (\omega_{\xi si})$  обозначает зависящий от состояния мира запас благ у потребителя  $i$ , тогда как  $\bar{\omega}_{\xi s} > 0$  обозначает совокупный запас блага  $\xi$  в состоянии мира  $s$ . Кроме того,  $p = (p_{\xi s})$  обозначает вектор цен во внутреннем равновесии Эрроу-Дебрё. Установим  $p_{11} = 1$ .

(а) Покажите, что  $p_{12} = \bar{\omega}_{11} / \bar{\omega}_{12}$  и  $p_{22} = 2\bar{\omega}_{11} / \bar{\omega}_{22}$ .

(б) Предположим, что

$$\omega_1 = (\omega_{111}, \omega_{211}, \omega_{121}, \omega_{221}) = (8, 14, 4, 6),$$

$$\omega_2 = (\omega_{112}, \omega_{212}, \omega_{122}, \omega_{222}) = (0, 0, 0, 10).$$

Найдите потребительские планы и цены в равновесии Эрроу-Дебрё.

(с) Опишите, как вы можете трансформировать ваш ответ на пункт (б) в равновесие Раднера для полного рынка активов, характеризующегося матрицей доходностей  $2 \times K$  в форме  $R = [r_1, \dots, r_K]$ , где  $r_k$  отражает доходность актива  $k$  в единицах материального блага 1.

5. (Опциональное упражнение на доказательство формулы оценки активов) Предположим, существуют  $K$  активов,  $L$  материальных благ и  $S$  состояний мира. Пусть  $r_k = (r_{1k}, \dots, r_{Sk}) \in \mathbb{R}^S$  обозначает вектор доходности актива  $k$  в единицах блага 1. Определим матрицу размерности  $S \times K$  как  $R = [r_1, \dots, r_K]$ . Предположим, что  $r_k > 0$  для любого  $k$  и что в каждом состоянии мира  $s$  существует такой актив  $k$ , что  $r_{sk} > 0$ . Условие отсутствия арбитража записывается как:

$$\diamond z_i \in \mathbb{R}^K \text{ такого, что } qz_i \leq 0 \text{ и } Rz_i > 0.$$

Здесь  $q \in \mathbb{R}^K$  обозначает вектор цен активов, а  $z_i \in \mathbb{R}^S$  это потенциальный портфель для любого заданного индивида  $i$ . В соответствии с условием отсутствия арбитража, из  $r_k > 0$  следует, что  $q_k > 0$  для любого актива  $k$ . Определим  $\Phi \equiv \{Rz_i : z_i \in \mathbb{R}^K, qz_i = 0\}$  и заметим, что  $\Phi$  это линейное подпространство в  $\mathbb{R}^S$ . Докажите шаги, приведённые ниже, следуя подсказкам в скобках:

**Шаг 1.** Существует  $\mu \in \mathbb{R}^S$  с  $\mu > 0$ , что  $\mu\phi = 0$  для любого  $\phi \in \Phi$ . (Подсказка. Условие отсутствия арбитража подразумевает, что линейное подпространство  $\Phi$  не пересекает выпуклое множество  $\mathbb{R}_+^S \setminus \{0\}$ . Разделите эти два

множества с помощью гиперплоскости. То, что  $\mu\phi = 0$  для любого  $\phi \in \Phi$  будет следовать из факта, что  $\Phi$  это линейное пространство. А то, что  $\mu \geq 0$  следует из аргумента, основанного на факте, что  $\phi + \lambda *_s \in R^S \setminus \{0\}$  для любого  $\phi \in R^S \setminus \{0\}$ , любого положительного числа  $\lambda$  и любого  $s \in S$ , где  $*_s$  обозначает соответствующий единичный вектор.)

**Шаг 2.** При заданном на Шаге 1  $\mu$ , вектор  $\mu R$  принадлежит линейному пространству  $\{\alpha q : \alpha \in R\}$ . (Подсказка. В ином случае мы можем отделить вектор  $\mu R$  от этого пространства. Так как это линейное пространство, то, как и на прошлом шаге, это приводит к такому разделяющему вектору нормали  $z_i \in R^K$ , что  $qz_i = 0$  и  $(\mu R)z_i = \mu(Rz_i) > 0$ . Задание  $\phi \equiv Rz_i$  приводит к противоречию с определением  $\mu$ .)

**Шаг 3.**  $\mu R = \alpha q$  для какой-то  $\alpha > 0$ . Так,  $\hat{\mu} R = q$ , где  $\hat{\mu} = \frac{1}{\alpha} \mu$ . Вывод: существует такой вектор  $\hat{\mu} > 0$ , что  $\hat{\mu} R = q$ . (Подсказка. В соответствии с Шагом 2, существует такая  $\alpha \in R$ , что  $\mu R = \alpha q$ . Заметим, что  $\mu R > 0$  и  $q \gg 0$ . Верно?)

## Теория игр

### Задания для промежуточной аттестации

1. Определите, какие из следующих утверждений являются правдой, а какие — ложью. Для каждого из них приведите аргументацию, доказывающую вашу точку зрения. Например, если ваш ответ “ложь”, то приведите контрпример. Пусть  $\Gamma = \{I, (\Delta(S_i))_{i \in I}, (u_i)_{i \in I}\}$  это конечная игра в нормальной форме. Пусть  $\sigma^* \in \times_{i \in I} \Delta(S_i)$  формирует равновесие в  $\Gamma$ .

  - (a) Если  $I = \{1, 2\}$  и для каждого агента  $i \in I$ ,  $\sigma_i^*$  это чистая стратегия, то для каждого агента  $i \in I$ ,  $\sigma_i^*$  не является строго доминируемой.
  - (b) Если  $\sigma^* \in \times_{i \in I} \Delta(S_i)$  это *Совершенное Равновесие Дрожащей Руки (Trembling Hand Perfect Equilibrium)*, то для каждого агента  $i \in I$ ,  $\sigma_i^*$  это полностью смешанная стратегия (completely mixed strategy).
  - (c) Если  $\sigma^* \in \times_{i \in I} \Delta(S_i)$  это *Совершенное Равновесие Дрожащей Руки*, то для каждого агента  $i \in I$ ,  $\sigma_i^*$  не является слабо доминируемой.
  - (d) Если  $\sigma^f \in \times_{i \in I} \Delta(S_i)$  не является равновесием Нэша в  $\Gamma$ , то существует такой  $j \in I$ , что  $\sigma_j^*$  слабо доминирует  $\sigma_j^f$ .
  - (e) Если  $I = \{1, 2\}$  и  $\Gamma$  — строго конкурентная игра, то для каждого агента  $i \in I$ ,  $\sigma_i^*$  является единственной *максимизирующей (maximizing)* стратегией.
2. Рассмотрим игру в расширенной форме, представленную на Рисунке 1. Найдите все *Совершенные Равновесия в Подыграх (Sub-game Perfect Equilibria)*, в которых каждый агент играет чистую стратегию (если таковые существуют). Есть ли в этой игре равновесие Нэша, в котором каждый игрок выбирает чистую стратегию, не являющуюся совершенной в подыграх?
3. В ассоциации исследований и разработок *Альфабета* есть два члена, фирмы 1 и 2. Правила ассоциации таковы, что любое независимое изобретение какой-либо из фирм полностью делится среди всех членов (то есть изобретения являются чистым общественным благом). Предположим, что есть новое изобретение, “Зиггер”, которое потенциально может быть создано любой из двух фирм. Создание этого продукта связано с издержками фирмы, равными  $c \in (0, 1)$ . Это является публичной информацией. Тем не менее, польза Зиггера для каждой из фирм  $i \in \{1, 2\}$  известно только самой фирме. Каждая фирма  $i \in \{1, 2\}$  имеет тип  $\theta_i$ , который независимо вытаскивается из равномерного на  $[0, 1]$  распределения, а польза от Зиггера для фирмы с типом  $\theta_i$  равна  $(\theta_i)^2$ . Хронология событий следующая: обе фирмы в частном порядке узнают свои типы. Затем каждая из них одновременно выбирает, создать Зиггер или нет. Стратегия в этой игре ставит в соответствие действие (либо *создать*, либо

не создавать Зиггер) каждому из типов, который может попасться игроку. Пусть  $s_i : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$  обозначает стратегию игрока  $i$ , где  $s_i(\theta_i) = 1$  означает, что "игрок  $i$  типа  $\theta_i$  создаёт Зиггер", а  $s_i(\theta_i) = 0$  означает, что "игрок  $i$  типа  $\theta_i$  не создаёт Зиггер".

Найдите *Равновесие Байеса-Нэша (Bayes-Nash Equilibrium)* в данной игре. Существует ли в этой игре такое *Равновесие Байеса-Нэша*  $(s_1^*, s_2^*)$ , что для какого-то  $i \in \{1, 2\}$ ,  $s_i^*(0) = s_i^*(1)$ ?

4. Рассмотрим игру, изображённую на Рисунке 2. Природа ходит первой и играет A с вероятностью  $\frac{2}{3}$ . Существует ли в этой игре *Слабое Секвенциальное Равновесие (Weak Sequential Equilibrium)*, не являющееся *Секвенциальным Равновесием (Sequential Equilibrium)*?
5. Рассмотрим игру, изображённую на Рисунке 3. Природа ходит первой и играет Q с вероятностью  $\frac{1}{2}$ . Найдите все *Слабые Секвенциальные Равновесия*, в которых каждый игрок в каждом информационном множестве **не** рандомизирует при выборе действия, если таковые существуют.

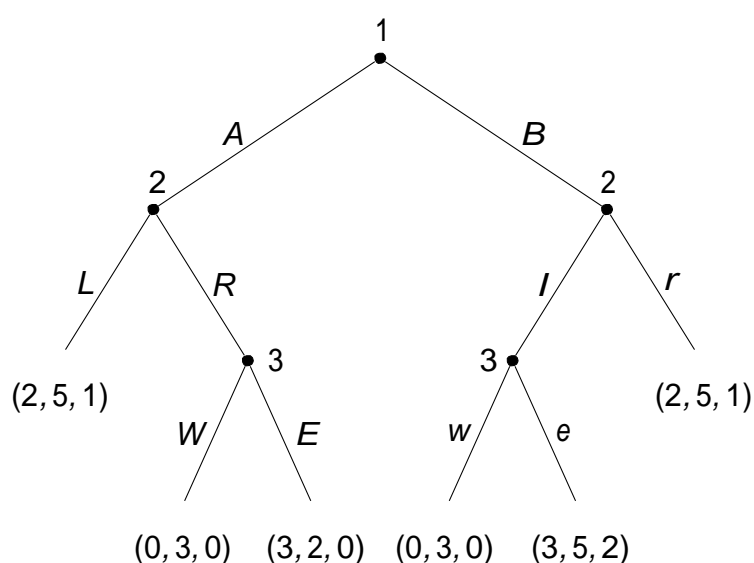


Рисунок 1: Игра для Задачи 2.

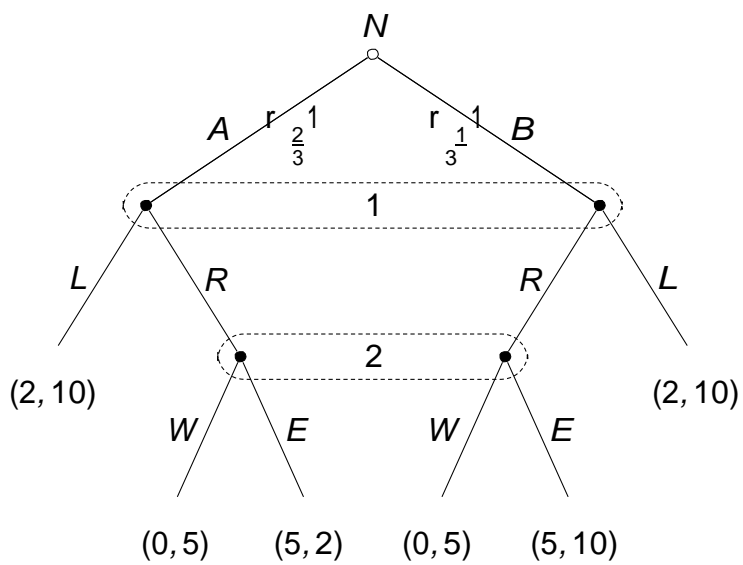


Рисунок 2: Игра для Задачи 4.

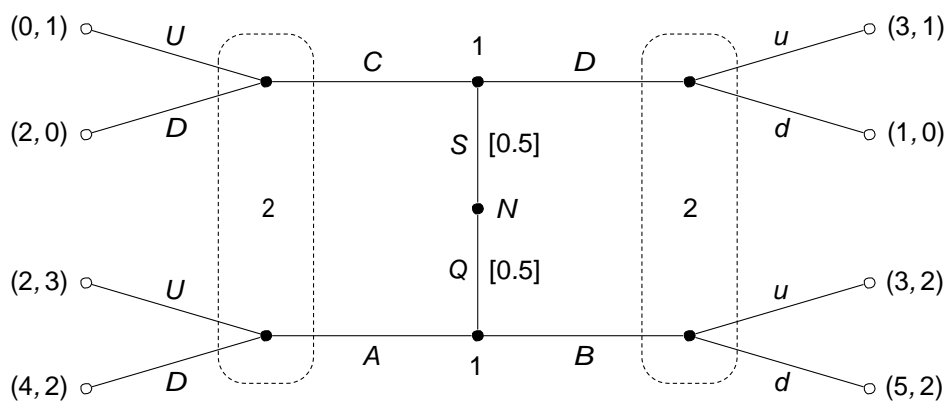


Рисунок 3: Игра для Задачи 5

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1.

1. Докажите следующее утверждение.

В бесконечной игре, представленной в нормальной форме и в которой все игроки ходят одновременно,

$$\Gamma = (I, \times_{i \in I} S_i, (u_i)_{i \in I}),$$

если в результате последовательного удаления строго доминируемых стратегий остаётся один профиль чистых стратегий, то этот профиль является единственным равновесием Нэша в данной игре.

2. Джон и Питер делают ставки на неделимый объект. Правила аукциона следующие. Индивид, который делает самую высокую ставку, выигрывает объект. Если Джон выигрывает, он платит сумму, которую поставил Питер. Если выигрывает Питер, то он платит сумму, которую поставил он сам. Оба игрока делают ставки одновременно. Определим для каждого индивида  $i \in \{J, P\}$  величину  $v_i \geq 0$ , обозначающую субъективную оценку индивидом ценности объекта, и сумму  $b_i \geq 0$ , которую ставит каждый из индивидов.

Их предпочтения описываются следующей структурой выплат для Джона и Питера соответственно:

$$u_J(b_J, b_P) = \begin{cases} v_J - b_P & \text{если } b_J > b_P \\ \frac{1}{2}(v_J - b_P) & \text{если } b_J = b_P \\ 0 & \text{если } b_J < b_P \end{cases}$$

$$u_P(b_J, b_P) = \begin{cases} v_P - b_J & \text{если } b_P > b_J \\ \frac{1}{2}(v_P - b_P) & \text{если } b_P = b_J \\ 0 & \text{если } b_P < b_J \end{cases}$$

Информация, представленная выше (включая оценки ценности объекта), является публичной информацией. Есть ли у какого-то из игроков слабо доминирующая стратегия ставить свою оценку? Можете ли вы найти такие значения параметров  $(v_J, v_P) \in \mathbb{R}_+^2$ , что пара стратегий  $(b_J, b_P) = (v_J, v_P)$  формирует равновесие Нэша? Для каждого ответа приведите аргументацию.

3. Докажите следующее утверждение.

В бесконечной игре, представленной в нормальной форме и в которой все игроки ходят одновременно,

$$\Gamma = (I, \times_{i \in I} S_i, (u_i)_{i \in I}),$$

если какая-то чистая стратегия  $s_i \in S_i$  строго доминируема какой-то стратегией  $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ , то для любого равновесия Нэша  $\sigma^* \in \times_{i \in I} \Delta(A_i)$  мы имеем,

что  $\sigma_i^*(s_i) = 0$  (то есть в равновесии игрок  $i$  выбирает чистую стратегию  $s_i$  с вероятностью 0).

*Подсказка:* Используйте метод от противного. Для начала, покажите, что  $\sigma_i^*(a_i) = 1$ . Если вы это сделаете, то получите половину баллов за это задание. Конечно, любое верное доказательство, отклоняющееся от моего предложения, будет вознаграждено полным баллом.

4. В индустрии оперируют  $n < +\infty$  фирм. Каждая из них может попробовать убедить конгресс дать индустрии субсидию. Пусть  $h_i$  обозначает количество часов, которое фирма  $i \in \{1, \dots, n\}$  потратила на попытки это сделать. Пусть  $c(h_i) = w_i h_i^2$ , где  $w_i > 0$ , это функция издержек фирмы  $i$  на усилия. Для каждого профиля усилий  $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$  объем субсидии, которую получает индустрия, равна

$$\alpha \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} h_i + \beta \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} h_i,$$

где  $\alpha, \beta \geq 0$ . Субсидия делится среди фирм из индустрии в равном количестве. Предположим, что все фирмы выбирают уровень усилий одновременно. Покажите, что у каждой фирмы есть строго доминирующая стратегия тогда и только тогда, когда  $\beta = 0$ . Какова строго доминирующая стратегия фирмы  $i$  в таком случае?



## Домашнее задание 2.

- На выборах представлены два кандидата: кандидат 1 и кандидат 2, а выбор делается исходя из голосов двух граждан. Возможны два состояния мира, А или Б. Граждане согласны, что кандидат 1 лучше в состоянии мира А, а кандидат 2 лучше в состоянии мира Б. Предпочтения каждого из граждан представлены ожидаемым значением функции выплат Бернулли, в соответствии с которой победа лучшего для данного состояния мира кандидата (то есть этот кандидат получает больше голосов, чем другой) даёт выплату 1, поражение лучшего кандидата даёт выплату 0, а ничья даёт выплату  $\frac{1}{2}$ . Гражданин 1 знает состояние мира, а гражданин 2 приписывает состоянию А вероятность 0.9 и состоянию Б – вероятность 0.1 Каждый гражданин может либо проголосовать за кандидата 1, либо за кандидата 2, либо воздержаться. Найдите равновесие (или равновесия) Байеса-Нэша, в котором каждый игрок выбирает чистую стратегию (если таковые существуют), отдельно при каждом из следующих предположений:
  - Граждане голосуют одновременно.
  - Гражданин 1 голосует первым, а гражданин 2 голосует после того, как наблюдает голос 1-го. Включает ли какое-либо из равновесий, что вы нашли, слабо доминируемую стратегию?
- Рассмотрим игру, представленную на Рисунке 1. Найдите все равновесия Нэша, включающие только чистые стратегии (если таковые существуют). Найдите все Совершенные Равновесия в Подыграх (Sub-game Perfect Equilibria), включающие только чистые стратегии.

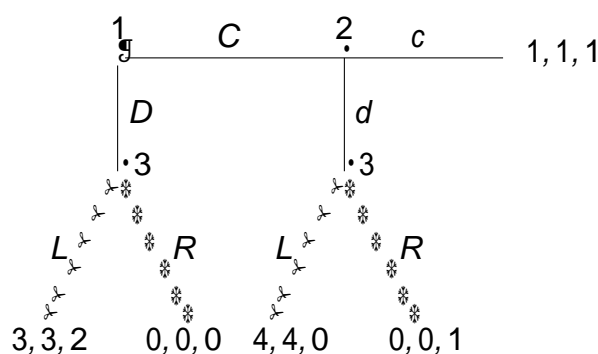


Рисунок 1: Игра для Задачи 2.

- Продавец предлагает товар, производимый с издержками  $c > 0$ . Покупатель оценивает этот товар в  $v > c$ . Они торгуются относительно товара и пытаются совершить сделку. Коэффициент дисконтирования равен  $\delta \in (0, 1)$ : если товар продали за цену  $p$  в периоде  $t$ , то в периоде  $s \leq t$  покупатель оценивает полезность от сделки в  $\delta^{t-s}(v - p)$ . Аналогично, продавец оценивает сделку

в  $\delta^{t-s}(p - c)$ . Если сделка не совершается, оба агента получают нулевую полезность. Все параметры являются публичной информацией. Предположим, что покупатель всегда покупает и продавец всегда продаёт, когда они индифферентны.

(a) Предположим, что продавец может делать одномоментное предложение  $p$  в момент  $t = 1$ . Затем покупатель либо принимает его, либо отказывается от сделки, и игра заканчивается. Каково множество равновесий Нэша в чистых стратегиях в данной игре? Каково Совершенное Равновесие в Подыграх?

(b) Предположим, что игра не заканчивается после ответа покупателя. Если он отвечает отказом в момент  $t = 1$ , то в момент  $t = 2$  он может сделать ответное предложение, в котором он называет свою цену. Продавец либо принимает предложение, либо отказывается, и игра заканчивается. Каково Совершенное Равновесие в Подыграх в данной игре?

(c) Теперь предположим, что продавец может делать предложения в  $t = 1$  и  $t = 2$ , а покупатель может предложить цену лишь в момент  $t = 3$  (после которого игра заканчивается). Каково Совершенное Равновесие в Подыграх?

(Подсказка: если покупатель отказывается от предложения в момент  $t = 1$ , то в  $t = 2$  начинается игра из предыдущего пункта с теми же выплатами в её Совершенном Равновесии в Подыграх.)

4. Рассмотрим игру, в которую играют Игрок 1 и Игрок 2. Каждый игрок  $i \in \{1, 2\}$  может выбрать действие  $a_i$  из конечного множества  $A_i$ . Выплата игроку  $i$  в любом профиле действий  $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$  равна  $f_i(a_1, a_2)$ . Предположим, для начала, что игроки делают ход одновременно. Сколько стратегий есть у каждого игрока? Теперь предположим, что Игрок 1 ходит первым, Игрок 2 наблюдает ход первого и после этого выбирает действие. Сколько стратегий есть у каждого игрока в данной спецификации игры? Далее, предположим, что в последней игре есть несколько Совершенных Равновесий в Подыграх. Покажите, что в таком случае существуют две такие пары действий  $(a_1^f, a_2^f)$  и  $(a_1^{ff}, a_2^{ff})$  (для которых либо  $a_1^f = a_1^{ff}$ , либо  $a_2^f = a_2^{ff}$ , либо и то, и другое), что или

$$f_1(a_1^f, a_2^f) = f_1(a_1^{ff}, a_2^{ff}), \text{ или}$$

$$f_2(a_1^f, a_2^f) = f_2(a_1^{ff}, a_2^{ff}).$$

### Домашнее задание 3.

1. Придумайте и запишите в расширенной форме такую игру, в которой для каждого равновесия Нэша (оно может быть единственно, если вы пожелаете) существует исход, эквивалентный Слабому Секвенциальному Равновесию (Weak Sequential Equilibrium). Продемонстрируйте это, решив игру для обоих типов равновесий.
2. Найдите все Слабые Секвенциальные Равновесия в игре, изображённой на Рисунке 1 (заметьте, что игроки могут смешивать свои действия). Для каждого Секвенциального Равновесия (Sequential Equilibrium), что вы нашли, определите, является ли оно Совершенным Равновесием в Подыграх (Subgame Perfect Equilibrium).

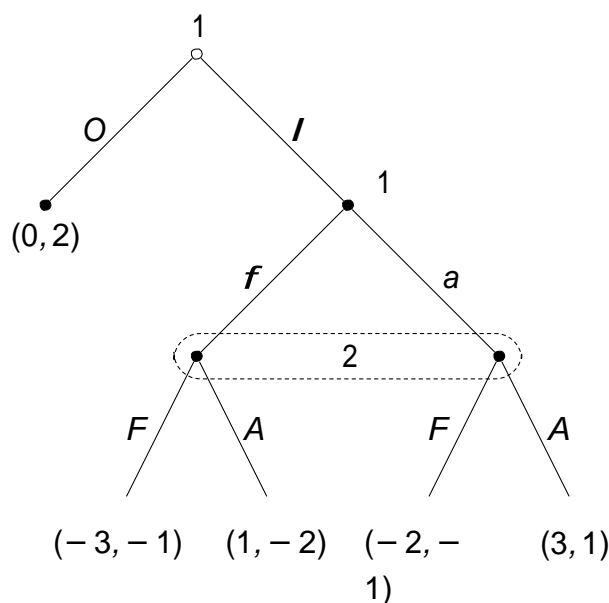


Рисунок 1: Игра для Задачи 2.

3. Найдите все Слабые Секвенциальные Равновесия в игре, изображённой на Рисунке 2 (заметьте, что игроки могут смешивать свои действия). Природа ходит первой и выбирает либо А, либо В с равными вероятностями.
4. Рассмотрим игру в расширенной форме, изображённую на Рисунке 3. Природа ходит первой и выбирает  $T$  с вероятностью  $\alpha$ .
  - (a) Существует ли такое значение  $\alpha \in (0, 1)$ , что в каком-то равновесии Нэша в данной игре оба игрока выбирают чистые стратегии?
  - (b) Пусть  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Найдите одно Слабое Секвенциальное Равновесие в данной игре.

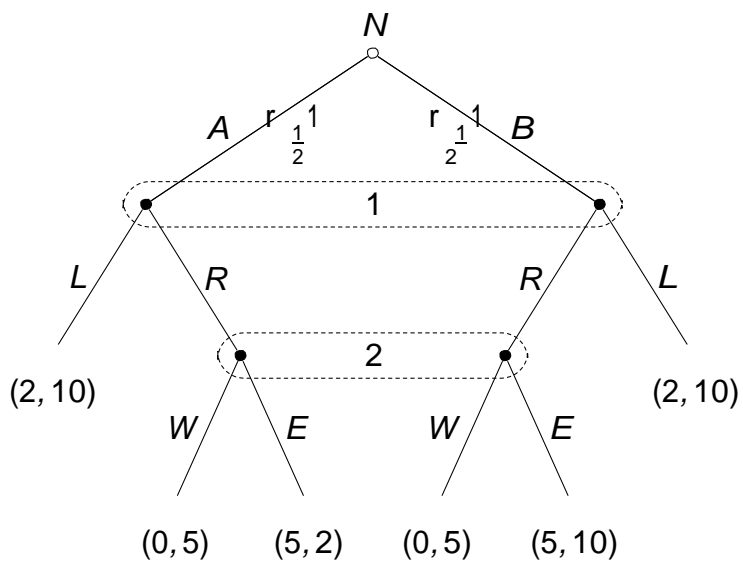


Рисунок 2: Игра для Задачи 3.

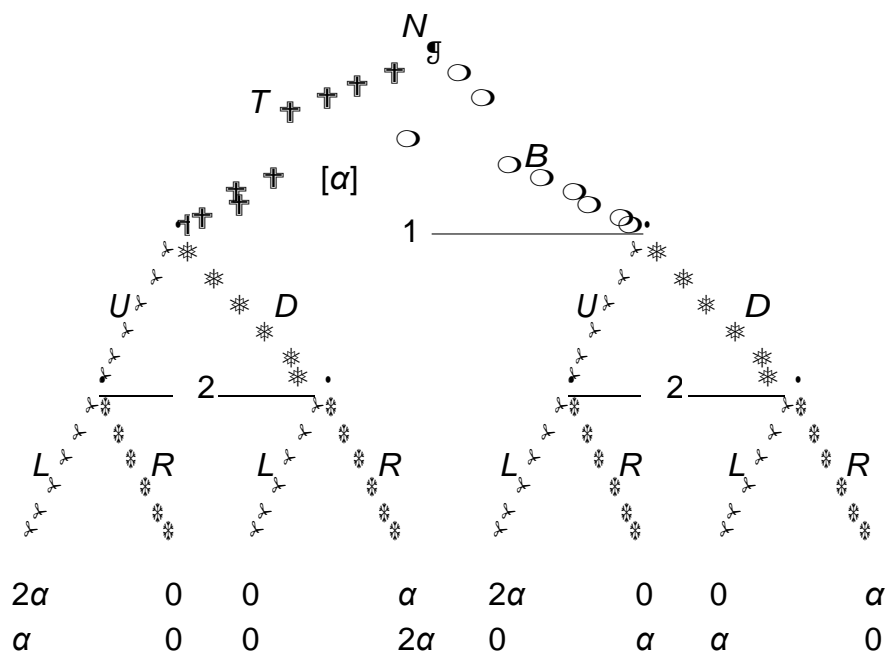


Рисунок 3: Игра для Задачи 4.



## Эконометрика 1

### Задания для промежуточной аттестации

Общий вес: 80 баллов.

1. (24 балла) Исследователь рассматривает две регрессионные спецификации:

$$\log(Y) = \beta_0 + \beta_1 \log(X) + U \quad (1)$$

$$\log \frac{Y}{X} = \alpha_0 + \alpha_1 \log(X) + V \quad (2)$$

где  $X$  и  $Y$  - случайные величины, для которых мы имеем выборку размера  $n$ .

- (a) (4 балла) Можно ли представить (2) как ограниченную версию модели (1)?
- (b) (7 баллов) Используя упомянутую выборку, исследователь оценивает обе модели с помощью МНК. Предсказанные значения можно найти по формулам:

$$\log(Y) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \log(X) \quad (3)$$

$$\log \frac{Y}{X} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \log(X) \quad (4)$$

Используя эти выражения, выразите  $\hat{\beta}_1$  через  $\hat{\alpha}_1$ .

- (c) (2 балла) Выразите  $\hat{\beta}_0$  через  $\hat{\alpha}_0$ .
- (d) (4 балла) Покажите, что

$$\log(Y) - \log(X) = \log \frac{Y}{X}$$

- (e) (2 балла) Покажите, что ошибки в моделях (3) и (4) идентичны.
- (f) (1 балл) Покажите, что стандартная ошибки  $\hat{\beta}_1$  и  $\hat{\alpha}_1$  идентичны.
- (g) (2 балла) Покажите соотношение между  $t$ -статистикой для  $\hat{\beta}_1$  и  $t$ -статистикой для  $\hat{\alpha}_1$ .

(h) (2 балла) Выясните, должны ли полученные значения  $R^2$  быть одинаковыми для данных моделей. Аргументируйте.

2. (16 баллов) Предположим, вы изучаете эффект от миграции на заработки. А именно, вы рассматриваете мигрантов из Вануату (маленькая страна в Тихом океане), которые обычно переезжают в Австралию.

(a) (2 балла) Вам предлагают довольно простой способ вычислить финансовую пользу от миграции (исключая затраты на сам переезд): просто сравнить ВВП на душу населения в Вануату и в Австралии. Будет ли такая оценка смещенной? Каков знак смещения? Опишите в деталях.

(b) (3 балла) Ваш коллега предлагает провести опрос среди 10000 домохозяйств, в которых есть хотя бы один индивид в возрасте от 18 до 45, и выяснить для каждого такого домохозяйства, где живут такие индивиды (в Вануату или в Австралии) и сколько они зарабатывают (в этой задаче мы абстрагируемся от возможных ошибок измерения, а также предполагаем, что выборка случайная, и все домохозяйства соглашались участвовать в исследовании). Такой опрос позволит вам оценить следующую линейную регрессию:

$$earnings_i = \beta_0 + \beta_1 migrated_i + u_i$$

где  $migrated_i$  принимает значение 1 если индивид в возрасте 18-45 живет за границей. Также допустим, что в каждом домохозяйстве имеется ровно один такой индивид.  $earnings_i$  - заработок в валюте домашней страны (опять же, здесь мы не заинтересованы в том, будет ли логарифм от заработков лучшей зависимой переменной). Будет ли ваша оценка смещенной? Каково направление смещения? Больше ли смещение, чем смещение в предыдущем пункте? Опишите в деталях.

(c) (5 баллов) Вы узнали, что можете запросить дополнительную информацию о индивидуальных характеристиках респондентов в вашей выборке. Однако, такие данные собрать дорого, поэтому выбор каждой дополнительной переменной должен быть хорошо аргументирован. Поэтому объясните, к какому смещению и как именно приводит отсутствие каждой дополнительной переменной.

(d) (6 баллов) Итак, вы получили дополнительные переменные из предыдущего пункта. Видите ли вы какие-то еще проблемы в текущем подходе? Можете ли вы выписать переменные, которые невозможно измерить, однако отсутствие которых в модели приводит к смещению оценки? Если да, то как следует обходить эту проблему? Будьте максимально подробны в описании потенциальных проблем и вашего решения. Заметьте, что проведение эксперимента невозможно.

3. (13 баллов) (Эта задача - продолжение предыдущей задачи про миграцию из Вануату в Австралию). Согласно результатам эксперимента, простое сравнение ВВП между двумя странами завывало финансовую выгоду от переезда

на 100 процентов, МНК оценка без контрольных переменных - на 41 процент, с контрольными переменными - на 31 процент. Ваш начальник просит вас повторить точность, достигнутую во время эксперимента, с помощью инструментальных переменных.

- (a) (5 баллов) Одна из возможных инструментальных переменных - количество знакомств мигранта за границей. Идея в том, что чем больше таких знакомств, тем проще осуществить переезд (так как такие знакомые могут существенно помочь с поиском информацией или с тратами на переезд). Хорошая ли это инструментальная переменная? Опишите в подробностях.
- (b) (5 баллов) Другой возможный инструмент - расстояние до офиса миграционной службы в Вануату. Здесь идея в том, что большинство людей не знают всех формальностей, связанных с переездом, а близость офиса миграционной службы способствует такой информированности. Хорошая ли это инструментальная переменная? Опишите в подробностях.
- (c) (3 балла) Допустим, вы считаете хотя бы один из инструментов валидным. Что вы будете с ним делать? Опишите как можно подробнее.

4. (17 баллов) Допустим, вы хотите оценить влияние Эболы (серьезного заболевания) на конфликтные ситуации используя кросс-секционные данные на муниципальном уровне в некоторой стране. Вы рассматриваете две переменные: количество случаев заболевания Эболой и количество конфликтных ситуаций. Модель имеет следующий вид:

$$conflict_i = \beta_0 + \beta_1 ebola_i + u_i$$

где  $i$  - индекс муниципалитета, и  $\beta_1 > 0$ . Причина, по которой влияние можно считать положительным - недовольство жителей недостаточными мерами борьбы с болезнью со стороны государства, а также недовольство традиционными практиками погребения.

У вас есть серьезные основания полагать, что  $ebola \perp u$ . Это предположение действительно для всех пунктов этой задачи.

К сожалению, и количество заболевших, и количество конфликтов могут быть измерены неточно (количество конфликтов оценено с помощью журналистских статей, а количество заболеваний - из официальных отчетов медицинских работников):

$$\tilde{conflict}_i = conflict_i + e_{conflict,i}$$

$$\tilde{ebola}_i = ebola_i + e_{ebola,i}$$

где  $E(e_{conflict}) = 0$  и  $E(e_{ebola}) = 0$ .

Для пунктов (b) - (e) предположите, что  $e_{conflict} \perp u$  и  $corr(e_{conflict}, e_{ebola}) = 0$ .



- (a) (5 баллов) Найдите асимптотическое смещение оценки  $\hat{\beta}_1$ .
- (b) (3 балла) Пусть  $e_{ebola} \perp ebola$ ,  $e_{conflict} \perp ebola$  и  $e_{ebola} \perp u$ . Является ли МНК оценка  $\hat{\beta}_1$  асимптотически смещенной? Каков знак смещения? Аргументируйте исходя из ответа на пункт (а) и собственной интуиции.
- (c) (3 балла) Пусть  $e_{ebola} \perp ebola$ ,  $e_{conflict} \perp ebola$  и  $Cov(e_{ebola}, u) < 0$ . Является ли МНК оценка  $\hat{\beta}_1$  асимптотически смещенной? Каков знак смещения? Аргументируйте исходя из ответа на пункт (а) и собственной интуиции.
- (d) (3 балла) Пусть  $e_{ebola} \perp ebola$ ,  $Cov(e_{conflict}, ebola) > 0$  и  $e_{ebola} \perp u$ . Является ли МНК оценка  $\hat{\beta}_1$  асимптотически смещенной? Каков знак смещения? Аргументируйте исходя из ответа на пункт (а) и собственной интуиции.
- (e) (3 балла) Пусть  $Cov(e_{ebola}, ebola) > 0$ ,  $Cov(e_{conflict}, ebola) = 0$  и  $e_{ebola} \perp u$ . Является ли МНК оценка  $\hat{\beta}_1$  асимптотически смещенной? Каков знак смещения? Аргументируйте исходя из ответа на пункт (а) и собственной интуиции.

5. (10 баллов) Рассмотрим следующую модель:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

- (a) (5 баллов) Докажите, что МНК оценку  $\hat{\beta}_1$  можно выразить через ошибки из дополнительной регрессии  $x_1$  на  $x_2$ .
- (b) (5 баллов) Была обчислена дополнительная регрессия  $y$  на  $x_2$ , и ошибки были сохранены как  $\hat{s}$ . Затем была оценена следующая модель:

$$\hat{s} = \varphi_0 + \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + v$$

Найдите выражение для  $\hat{\varphi}_1$  и сравните его с выражением для  $\hat{\beta}_1$  из пункта (а).

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1.

Используйте Stata для эмпирических задач. Сдача do-файла и log-файла обязательна.

1. (30 баллов) Рассмотрим случайную величину со следующим условным распределением:

$$Y|X = \begin{cases} LN(\mu_0, \sigma_0) & \text{если } X = 0 \\ LN(\mu_1, \sigma_1) & \text{если } X = 1 \end{cases}$$

где  $LN$  означает лог-нормальное распределение.

- (a) Найдите  $E[Y|X]$  и  $E[Y^2|X]$ .
  - (b) Пусть  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ . Найдите  $E[Y]$  и  $E[Y^2]$ .
  - (c) Теперь предположим что  $LN(\mu, \sigma)$  - не лог-нормальное распределение, а просто некоторое распределение со средним  $\mu$  и дисперсией  $\sigma$ . Как ваш ответ к пунктам 1 и 2 меняется в этом случае?
2. (10 баллов) Рассмотрим простую регрессионную модель  $Y = \beta_0 + \beta_1 X + u$ , где  $E[u|X] = 0$ . Предположим, что  $X_i = \beta^2 + E_i$ , причем  $E_i$  и  $u_j$  независимы. Какое стандартное предположение нарушается в этом случае? Будут ли МНК оценки  $\hat{\beta}_0$ ,  $\hat{\beta}_1$  смещенными?
  3. (30 баллов) Решите задачу С3.4 из книги Вулдриджа (Wooldridge - Introductory Econometrics). Вы можете скачать и открыть файл ATTEND.RAW в Stata используя следующий код:

```
ssc install bcuse
bcuse attend
```

4. (30 баллов) Решите задачу С3.9 из книги Вулдриджа (Wooldridge - Introductory Econometrics). Вы можете скачать и открыть файл CHARITY.RAW в Stata используя следующий код:

```
bcuse charity
```

## Домашнее задание 2.

Используйте Stata для эмпирических задач. Сдача do-файла и log-файла обязательна.

1. (25 баллов) Рассмотрим простую регрессию, проходящую через начало координат:

$$y = \alpha x + E$$

Совместное распределение величин  $x$  и  $E$  следующее:  $P\{x = -1, E = -1\} = 1/6$ ,  $P\{x = 1, E = -1\} = 1/3$ ,  $P\{x = -1, E = 1\} = 1/3$ ,  $P\{x = 1, E = 1\} = 1/6$ .

- (a) (8 баллов) Равно ли математическое ожидание  $E$  нулю?
- (b) (8 баллов) Является ли  $x$  эндогенным (то есть, скоррелирован ли он с ошибкой)? Если да, то каков знак смещения МНК оценки  $\alpha$ ?
- (c) (9 баллов) Предположим, что один эконометрист знает, что  $E$  может принимать только два значения:  $-1$  и  $1$ . Может ли он несмещенно оценить  $\alpha$  на основе выборки из  $x$  и  $y$ ? Если да, предложите соответствующую оценку.
2. (25 баллов) Предположим, что исследователь знает наверняка, что следующие линейные модели верны:

$$y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + u_1$$

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_2 + u_2$$

Более того, эти модели удовлетворяют предположениям Гаусса-Маркова (ГМ), а также  $u_1$  и  $u_2$  независимы друг от друга и от  $x_1, x_2$ . Однако, исследователь наблюдает только величину  $y = y_1 + y_2$  и хочет оценить следующую модель:

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + u$$

- (a) (5 баллов) Какие из предположений ГМ точно соблюдаются? Какие нет? Докажите.
- (b) (10 баллов) Допустим, что предположения ГМ соблюдаются. Верно ли, что  $\alpha_0 \geq 0$  и  $\beta_0 \geq 0$ ? Докажите или приведите контрпример.
- (c) (10 баллов) Допустим, что выборка по  $y_{1i}, y_{2i}$  все же нашлась, и исследователь оценил обе модели по отдельности и получил одинаковые значения  $R^2$ . Должен ли  $R^2$  из общей модели быть таким же? Докажите или приведите контрпример.
3. (25 баллов) Решите задачу С3.6 из книги Вулдриджа (Wooldridge - Introductory Econometrics). Вы можете скачать и открыть файл WAGE2.RAW в Stata используя следующий код:

```
ssc install bcuse  
bcuse wage2
```

4. (25 баллов) Решите задачу С3.8 из книги Вулдриджа (Wooldridge - Introductory Econometrics). Вы можете скачать и открыть файл DISCRIM.RAW в Stata используя следующий код:

```
bcuse discrim
```

### Домашнее задание 3.

Используйте Stata для эмпирических задач. Сдача do-файла и log-файла обязательна.

1. (25 баллов) Рассмотрим следующую истинную модель:

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + E$$

Известно, что:

$$E[E|x_1, x_2] = 0$$

$$E[E^2|x_1, x_2] = \sigma^2$$

$$E[x_2|x_1] = \alpha x_1$$

Однако, оценивается следующая модель:  $y = \beta_1 x_1 + u$ .

- Какие условия нужно наложить на параметры  $\beta_1, \beta_2, \alpha, \sigma^2$ , чтобы МНК оценка  $\hat{\beta}_1$  была несмещенной?
  - Какие условия нужно наложить на параметры  $\beta_1, \beta_2, \alpha, \sigma^2$ , чтобы  $V[u_i|x_{1i}] = \text{const} \forall i$ ?
  - Предположим, что  $E_i \sim N(0, \sigma^2)$ , где  $\sigma^2$  известна. Как бы вы тестировали гипотезу  $H_0 : 2\beta_1 - 5\beta_2 = 0$ ? Что меняется, если  $\sigma^2$  неизвестна?
2. (25 баллов) Рассмотрим следующую регрессию:  $y = \beta_0 + \beta_1 x + e$ . Верны ли следующие утверждения или нет? Докажите или приведите контрпример.
- $E[e|x] = 0 \implies E[x^2 e] = 0$
  - $E[ex] = 0 \implies E[x^2 e] = 0$
  - $E[e|x] = 0 \implies e$  не зависит от  $x$
  - $E[ex] = 0 \implies E[e|x] = 0$

3. (25 баллов) Решите задачу C4.8 из книги Вулдриджа (Wooldridge - Introductory Econometrics). Вы можете скачать и открыть файл 401KSUBS.RAW в Stata используя следующий код:

```
ssc install bcuse
bcuse 401ksubs
```

4. (25 баллов) Решите задачу C4.9 из книги Вулдриджа (Wooldridge - Introductory Econometrics). Вы можете скачать и открыть файл DISCRIM.RAW в Stata используя следующий код:

```
bcuse discrim
```

### Домашнее задание 4.

Используйте Stata для эмпирических задач. Сдача do-файла и log-файла обязательна.

1. (25 баллов) Рассмотрим модель  $y_i = \gamma x_i + E_i$ , где  $E[E_i|x_i] = 0$ . Также пусть  $\theta = \frac{1}{\gamma}$ .
  - (a) Предложите состоятельную оценку для  $\gamma$ . Является ли она смещенной?
  - (b) Предложите состоятельную оценку для  $\theta$ . Является ли она смещенной?
  - (c) Найдите асимптотическое распределение  $\hat{\gamma}$ .
  - (d) Найдите асимптотическое распределение  $\hat{\theta}$ .
  - (e) Предположим, что исследователь оценивает модель  $y_i = \gamma x_i + E_i$  и вычисляет  $R^2$  (обозначим его за  $R_\gamma^2$ ). Также он оценивает модель  $x_i = \theta y_i + u_i$  и также вычисляет  $R^2$  (обозначим его за  $R_\theta^2$ ). Верно ли, что  $R_\gamma^2 = R_\theta^2$ ? Докажите или приведите контрпример.
  - (f) Рассмотрим модели из предыдущего пункта. Верно ли, что  $\hat{\gamma} = 1/\hat{\theta}$ , где оценки получены с помощью МНК? Докажите или приведите контрпример.
2. (25 баллов)
  - (a) Рассмотрим модель  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i$ . Найдите предел по вероятности для  $R^2$ .
  - (b) Рассмотрим модель  $Y = eK^\alpha L^{1-\alpha}$ , где  $E[\log(e)] = 0$  и  $e$  экзогенна. Как бы вы состоятельно оценили  $\alpha$ , используя МНК? Является ли ваша оценка смещенной?
  - (c) Рассмотрим истинную зависимость  $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + E$ , где  $E[E|x] = 0$ . Однако, исследователь оценивает модель  $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$ . При каком условии полученная МНК оценка  $\hat{\beta}_1$  будет несостоятельной?
3. (25 баллов) Решите задачу C5.4 из книги Вулдриджа (Wooldridge - Introductory Econometrics). Вы можете скачать и открыть файл 401KSUBS.RAW в Stata используя следующий код:
 

```
ssc install bcuse
bcuse 401ksubs
```
4. (25 баллов) Решите задачу C6.12 из книги Вулдриджа (Wooldridge - Introductory Econometrics). Вы можете скачать и открыть файл 401KSUBS.RAW в Stata используя следующий код:
 

```
bcuse 401ksubs
```

## Домашнее задание 5.

Используйте Stata для эмпирических задач. Сдача do-файла и log-файла обязательна.

1. (25 баллов) В экономике есть статьи, посвященные альтернативному использованию лесов и парков. Для того, чтобы оценить ценность таких мест для туристов, исследователи часто моделируют количество визитов в парки как функцию от цены посещения и различных социо-демографических и экономических характеристик посетителей. Пусть  $y_i$  - количество посещений парка  $i$  за день, а  $x_i$  - цена входного билета. Также предположим, что исследователю известно, что  $E[y|x] = \beta_0 + \beta_1 x$ . Выборочное распределение  $y$  таково:

Таблица 1: Sample distribution of  $y$

$y$	0	1	2	3	>4
$p^*$	0.2	0.4	0.2	0.1	0.1

где  $p^*$  - относительные частоты в выборке.

- (a) (5 баллов) Считаете ли вы вероятным в данном случае какие-либо отклонения от стандартных предположений Гаусса-Маркова? Опишите в деталях.
- (b) (10 баллов) Предположим, что

$$Pr[y = k|x] = \frac{\exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x)(\alpha_0 + \alpha_1 x)^k}{k!}$$

Как связаны между собой альфы и беты? Какие из стандартных предположений нарушаются в данной модели? Особенно детально опишите поведение условной дисперсии.

- (c) (10 баллов) Предположим, что  $\beta_0 = 0$ . Будет ли МНК оценка для  $\beta_1$  несмещенной? Найдите ее асимптотическое распределение.
2. (25 баллов) Пусть  $d_{1i} = 1$  и  $d_{2i} = 0$  если  $i$ -й респондент мужчина, и  $d_{1i} = 0$  и  $d_{2i} = 1$ , если женщина. Пусть в выборке  $n_1$  мужчин и  $n_2$  женщин. Следующие три модели оцениваются с помощью МНК:

$$y_i = \mu + \beta_1 d_{1i} + \beta_2 d_{2i} + e_i \tag{1}$$

$$y_i = \beta_1 d_{1i} + \beta_2 d_{2i} + e_i \tag{2}$$

$$y_i = \mu + \alpha d_{1i} + e_i \tag{3}$$

- (a) (10 баллов) Сравните регрессии (2) и (3). Является ли одна обобщенной версией другой? Опишите связь между параметрами в (2) и (3).
- (b) (5 баллов) Найдите  $\eta^f d_1$  и  $\eta^f d_2$ , где  $\eta$  - вектор размера  $n \times 1$ , состоящий из единиц, а вектор вида  $dk$  состоит из  $d_{ki}$ .
- (c) (5 баллов) Пусть  $d$  - вектор, состоящий из  $d_1$  и  $d_2$ . Рассмотрим предположение  $E(d_j e_j) = 0$ . Имеет ли такое предположение смысл в этой задаче?
- (d) (5 баллов) Допустим, вы оцениваете параметры регрессии (2). Покажите, что  $\hat{\beta}_1$  - выборочное среднее зависимой переменной среди мужчин, а  $\hat{\beta}_2$  - выборочное среднее зависимой переменной среди женщин. Как бы вы тестировали гипотезу о равенстве среднего значения зависимой переменной среди мужчин и среди женщин? Как еще можно протестировать такую гипотезу? В чем разница перечисленных вами подходов?
3. (25 баллов) Решите задачу C7.13 из книги Вулдриджа (Wooldridge - Introductory Econometrics). Вы можете скачать и открыть файл 401KSUBS.RAW в Stata используя следующий код:

```
ssc install bcuse
bcuse 401ksubs
```

4. (25 баллов) Решите задачу C8.5 из книги Вулдриджа (Wooldridge - Introductory Econometrics). Вы можете скачать и открыть файл 401KSUBS.RAW в Stata используя следующий код:

```
bcuse 401ksubs
```

5. (1 балл) Бонусная задача.

В эконометрических задачах мы часто накладываем определенные условия на ошибку в регрессии и редко рассматриваем совместное распределение зависимой и независимых переменных. Вместо этого мы чаще всего рассматриваем условное распределение зависимой переменной. Эта задача позволяет взглянуть на регрессию с другой стороны. Допустим, вам известны первые и вторые моменты совместного распределения  $y$  и  $x$ . А именно, пусть  $E[x] = \mu_x$ ,  $E[y] = \mu_y$ ,  $V[x] = \sigma_x^2$ ,  $V[y] = \sigma_y^2$ ,  $Cov[x, y] = \sigma_{xy}$ .

- (a) Предположим, что  $E[y|x] = \beta_0 + \beta_1 x$  как в первой задаче. Выразите  $\beta_0$  и  $\beta_1$  через моменты, выписанные выше в условии.
- (b) Если  $E[y|x] = \beta_1 x$ , чему равен коэффициент  $\beta_1$ , если выразить его через моменты, выписанные выше?
- (c) Если  $E[y|x] = \beta_1 x$ , накладывает ли это какие-то ограничения на моменты, выписанные выше? Если да, напишите эти ограничения.



## Домашнее задание 6.

Используйте Stata для эмпирических задач. Сдача do-файла и log-файла обязательна.

1. (50 баллов) Рассмотрим модель  $y_i = \beta_0 + (\beta_1 + e_i)x_i + u_i$ , где  $E[u_i|X] = 0$  и  $E[e_i|X] = 0$ .
  - (a) Является ли МНК оценка для  $\beta_1$  несмещенной и состоятельной? Докажите.
  - (b) Пусть инструментальная переменная  $z$  скоррелирована с  $x$  и не скоррелирована с  $u_i$  и  $e_i$ . Будет ли инструментальная оценка несмещенной и состоятельной? Докажите.
  - (c) Пусть теперь  $E[e_i|X] = 0$ . Будет ли инструментальная оценка из пункта (2) несмещенной и состоятельной? Если нет, какие дополнительные предположения для этого нужны? Докажите.
  - (d) Пусть теперь  $y_i = \beta_0 + \beta_1 e_i x_i + u_i$ , где  $E[u_i|X] = 0$  и  $E[e_i|X] = 1$ . Будет ли МНК оценка  $\beta_1$  несмещенной и состоятельной? Докажите.

*"Всякое человеческое познание начинается с созерцаний, переходит от них к понятиям и заканчивается идеями".*  
Иммануил Кант, Критика чистого разума

2. (50 баллов) Здесь описаны 5 идей для исследования. Предположим, в каждом случае мы оценивали бы регрессию, чтобы выявить связь между зависимой и независимыми переменными. Однако, во всех приведенных примерах возникают проблемы с эндогенностью. Вам нужно выбрать 3 из описанных 5 идей и для каждой из них описать исследовательский подход. А именно, вам нужно описать источник эндогенности (15 баллов) и предложить подходящую инструментальную переменную для каждой модели (25 баллов). 10 баллов вы можете получить за структуру написанного. Помните, что списывание наказывается.
  - (a) Влияние курения на здоровье.
  - (b) Влияние количества лет, потраченных на образование, на зарплату.
  - (c) Влияние социальной сети Вконтакте на популярность оппозиционных движений в городах России. Изначальное соображение заключается в том, что Вконтакте неявно стимулирует подобные движения, так как оппозиционерам проще координироваться, используя социальные сети.
  - (d) Влияние изменений в цене на количество купленных смартфонов. На самом деле, полученные данные представляют из себя не точки с кривой спроса, но точки пересечения кривых спроса и предложения.
  - (e) Влияние бедности на выраженность протестных движений.

## Эконометрика 2

### Задания для промежуточной аттестации

Общий вес: 80 баллов.

1. (20 баллов) Пусть  $y_t$  следует случайному процессу с временным трендом:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t, t = 1, \dots, n$$

где  $u_t$  независимые и имеют стандартное нормальное распределение.

- (a) (5 баллов) Какова дисперсия  $y_t$ ?  
 (b) (5 баллов) Какова дисперсия МНК оценки  $\beta_1$ ?  
 (c) (10 баллов) Предположим, эконометрист изучает следующую модель того же самого процесса:

$$b. y_t = \gamma + \varepsilon_t, t = 2, \dots, n$$

Сравните асимптотические свойства МНК оценки  $\gamma$  и оценки  $\beta_1$  из предыдущего пункта.

2. (20 баллов) Пусть  $y$  дискретная случайная величина, принимающая значения 0 и 1. Распределение  $y$  при данном значении скалярной объясняющей величины  $x$  задается как:

$$Pr(y = 1|x) = \frac{\exp\{\beta x\}}{1 + \exp\{\beta x\}}$$

где  $\beta$  интересующий нас скалярный параметр.  $\{y_i, x_i\}_{i=1}^n$  - случайная выборка. Предоставьте ответ в явном виде везде, где это возможно.

- (a) (5 баллов) Выпишите логарифмическую функцию правдоподобия.  
 (b) (5 баллов) Является ли логарифмическая функция правдоподобия вогнутой по отношению к параметру?  
 (c) (5 баллов) Выведите ММП оценку  $\beta$ .  
 (d) (5 баллов) Выпишите информационную матрицу.
3. (20 баллов) Для межгруппового оценивания (панельные данные) имеется следующее уравнение:

$$\bar{y}_i = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}_i + a_i + \bar{u}_i$$

где черта над буквами означает усреднение по времени. Предположим, мы имеем случайную кросс-секционную выборку. Пусть  $a_i$  имеет нулевое среднее и  $Cov(x_{it}, a_i) = \sigma_{xa} > 0$ . Так же будем считать, что  $\bar{u}_i$  и  $x_i$  не скоррелированы.

- (a) (5 баллов) Выведите  $Cov(\bar{X}_i, a_i)$ .
- (b) (5 баллов) Найдите знак асимптотического смещения межгрупповой оценки.
- (c) (10 баллов) Пусть  $x_{it}$  и дисперсия  $Var(x_{it}) = i$  не скоррелированы. Найдите вероятностный предел межгрупповой оценки. Предоставьте развернутый ответ.

4. (20 баллов) Пусть имеется следующая линейная модель:

$$y_t = \beta_1 x_t + \beta_2 y_{t-1} + u_t, u_t = \rho u_{t-1} + E_t, t = 2, \dots, n.$$

где  $u_t$  независимые стандартно распределенные сл. величины. При этом  $0 < \rho < 1$ .

- (a) (5 баллов) Является ли МНК оценка  $\beta_1$  смещенной?
- (b) (5 баллов) Является ли МНК оценка  $\beta_2$  состоятельной?
- (c) (5 баллов) Выпишите функцию правдоподобия для параметров модели.
- (d) (5 баллов) Пусть  $x_t$  константа равная  $a$ . Выведите долгосрочную дисперсию  $y_t$ .

## Эконометрика 3

### Задания для промежуточной аттестации

Общий вес работы: 90 баллов.

1. (10 баллов) *Истинные, ложные и неопределенные утверждения.*

Полно и ёмко прокомментируйте следующее утверждение. “В случае серийной корреляции конечного порядка  $q$  можно скомбинировать идеи Хансена-Ходрика (Hansen-Hodrick) и Ньюи-Уэста (Newey-West): просуммировать как в оценке Хансена-Ходрика (Hansen-Hodrick Estimator), т.е. по  $j$  от  $-q$  до  $q$  и использовать треугольные веса Ньюи-Уэста”.

2. (20 баллов) *Приближение распределения.*

Рассмотрим случайную величину  $x$ , у которой существуют все моменты. Предположим, что есть случайная выборка. Рассмотрим следующую статистику:

$$T = \frac{n}{n + \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Какое приближение распределения  $T$  вы можете предложить? Ваше предложение должно быть реализуемым, то есть чтобы можно было построить это приближение, имея данные  $\{x_i\}_{i=1}^n$ .

Как изменится ваш ответ, если  $x$  – это стационарный эргодичный временной ряд?

3. (60 баллов) *Урожайность.*

Пусть регрессионная модель, связывающая среднее логарифма урожайности на одно поле  $y$  и плотность посадки  $d$ , имеет следующий вид

$$E[\log(y)|d] = -\log(\alpha + \gamma d)$$

где  $\alpha$  и  $\gamma$  – неизвестные неотрицательные параметры. Доступна случайная выборка из  $n$  наблюдений пар  $(y, d)$ .

- Приведите условие локальной идентификации параметров регрессии. Опишите один случай, в котором параметры не идентифицируемы.
- Детально* покажите, как построить асимптотический 95% доверительный интервал для среднего логарифма урожайности поля при плотности посадки, равной единице.
- Опишите *в деталях* наиболее эффективный (то есть дающий наиболее качественное приближение) бутстраповский тест на 5% уровне значимости для проверки гипотезы, что среднее логарифма урожайности поля

---

не зависит от плотности посадки, против гипотезы, что плотность посадки имеет отрицательный эффект на среднее логарифма урожайности поля. Кроме этого, напишите о достоинствах и недостатках использования бутстраповского подхода в этой ситуации.

- (d) Предположим, что исследователь строит непараметрическую регрессию  $\log(y)$  на  $d$  при помощи ядерный подход (kernel approach). Пусть  $d$  имеет равномерное распределение на  $[0,2]$  и  $\log(y)$  условно гомоскедастична. Нарисуйте на одном графике (размером на всю страницу) истинную функцию регрессии, вероятный разброс (scatterplot) 30 наблюдений из выборки и оценку Надарая-Уотсона (Nadaraya-Watson Estimator) на отрезке  $[0,3]$  при использовании прямоугольного ядра с параметром ширины окна (bandwidth)  $h = \frac{1}{4}$ . Объясните все особенности данной ситуации. Проанализируйте смещение и дисперсию оценки на  $[0,3]$ .

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1.

Общий вес работы: 100 баллов.

Ответьте на следующие вопросы, основанные на статье "A statistical approach to option pricing":

1. (20+10 баллов) *Покопаться в Голдберgere.*

Прочитайте главы 1,3,5,6 в книге "A Course in Econometrics" А. Голдбергера (A. Goldberger)

- (a) Решите задачу 5.8 из книги
- (b) Решите задачу 6.7 из книги

2. (30 баллов) *Результаты экзамена.*

Исследователь извлекает случайную выборку размера  $n = 100$  из генеральной совокупности учащихся старшей школы и их результатов экзамена. Для каждого учащегося  $i = 1, \dots, n$  исследователь наблюдает:  $x_i$  - тип школы (0, если государственная и 1, если частная) и  $y_i$  - оценку за экзамен (1, 2, или 3). Эмпирическое распределение  $(x, y)$  представлено ниже:

	Балл = 1	Балл = 2	Балл = 3	Всего
Государственная школа	0.20	0.50	0.10	0.80
Частная школа	0.05	0.10	0.05	0.20
Всего	0.25	0.60	0.15	1.00

- (a) (5 баллов) Найдите аналоговую оценку оптимального предиктора (под средней квадратической ошибкой прогноза (MSPE))  $y$  при данном  $x$
- (b) (15 баллов) Пусть  $VLP[x|y]$  обозначает лучший линейный предиктор (под средней квадратической ошибкой прогноза (MSPE))  $x$  при данном  $y$ .  
Посчитайте  $VLP[x|y = 3] - VLP[x|y = 1]$
- (c) (10 баллов) Обсудите высказывание: Данные свидетельствуют о том, что поступление в частную, а не в государственную школу значительно увеличивает шансы на получение более высоких баллов. Оцененный эффект от поступления в частные школы – увеличение вероятности получить 3 балла с  $\frac{1}{8}$  до  $\frac{1}{4}$ . (продолжение на следующей странице)

3. (40 баллов) *Python и матричная алгебра регрессии.*

В задании положите  $n = 100$  и  $k = 3$ . Приведите результаты с точностью до третьего знака после запятой.

- (a) Сгенерируйте матрицу  $X_{n \times k}$  независимых стандартных нормальных случайных величин, используя генератор случайных чисел. Рассчитайте  $X^f X$  и приведите результаты.
- (b) Используя цикл по  $i$ , рассчитайте  $\sum_{i=1}^n x_i x_i^f$ , где каждый вектор  $x_i$  – транспонированный  $i$ -ая строка  $X$ . Приведите результаты и убедитесь, что эта сумма совпадает с  $X^f X$ .
- (c) Рассчитайте и приведите результаты выборочного среднего и выборочной дисперсии случайного вектора  $x$ , выборкой из которого является  $X$ . Насколько они близки к выборочному среднему и выборочной дисперсии  $x$ .
- (d) Какой ранг у  $n^{-1} X^f X$ ? Какой ранг у  $Q_{xx} \equiv E[xx^f]$ ? Какой ранг у  $xx^f$ ? Рассчитайте  $n^{-1} X^f X$  и приведите результаты. Рассчитайте  $Q_{xx}^{-1}$ .
- (e) В подобном ключе удостоверьтесь, что

$$\sum_{i=1}^n \omega_i x_i x_i^f = X^f \Omega X$$

и

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^{-1} x_i x_i^f = X^f \Omega^{-1} X,$$

где  $\Omega = \text{diag}\{\omega_i\}_{i=1}^n$  – произвольная диагональная матрица  $n \times n$ , с ненулевыми и однородными  $\omega_i$  на главной диагонали.

## Домашнее задание 2.

Общий вес работы: 100 баллов.

1. (20 баллов) *Асимптотика моментов высоких порядков.*

Допустим нас интересует асимметрия  $\mu_3 = E[z^3]$  и эксцесс  $\mu_4 = E[z^4]$  случайной величины  $z$  с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Предложите аналоговые оценки для  $\mu_3$  и  $\mu_4$  и выведите их совместное асимптотическое распределение. Также выведите асимптотическое распределение аналоговой оценки для  $\zeta = \mu_4^2 / \mu_3^3$

2. (20 баллов) *Тест на независимость знаков.*

Допустим мы хотим протестировать независимость между непрерывно распределенными случайными величинами  $x$  и  $y$ . С этой целью мы предложили нулевую гипотезу  $H_0 : E[\text{sign}(x)|y] = \text{const}$ , где  $\text{sign}(\cdot)$  – функция принимающая значения  $+1, -1, 0$  в зависимости от знака аргумента. Чтобы протестировать нулевую гипотезу, мы прогнали линейную регрессию  $\text{sign}(x)$  на константу и  $\text{sign}(y)$ , и протестировали коэффициент наклона  $\beta$  на равенство нулю, используя МНК (OLS) оценку  $\hat{\beta}$  и случайную выборку  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ .

Выпишите скелетную функцию данной регрессии под  $H_0$ . Выведите асимптотическое распределение  $\hat{\beta}$  под  $H_0$ . Постройте простую состоятельную оценку ее асимптотической дисперсии, и  $t$ -статистику, использующую эту оценку.

3. (60 баллов) *Точность асимптотического приближения.*

*Исследование методом Монте-Карло* – симуляционное упражнение, направленное на изучение свойств методов оценивания в малых выборках. Общая идея:

- построить модель процесса получения данных,
- сгенерировать несколько выборок искусственных данных,
- использовать сгенерированные данные и выбранный метод оценивания (estimator) для получения нескольких оценок (estimates),
- использовать эти оценки для определения примерных свойств выборочного распределения данного метода оценивания.

Допустим, мы имеем следующую регрессию среднего:

$$y = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + e, \quad E[e|x_1, x_2] = 0.$$

Мы имеем случайную выборку  $\{(x_{1i}, x_{2i}, y_i)\}_{i=1}^n$ . Ваша задача оценить качество аппроксимации точного распределения оценки  $\hat{\theta} = \hat{\beta}_1 / \hat{\beta}_2$  параметра  $\theta = \beta_1 / \beta_2$  и его  $t$ -значения  $t_{\hat{\theta}}$ , где  $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^f$  – МНК (OLS) оценивание  $(\beta_1, \beta_2)^f$  с соответствующим асимптотическим распределением.



При генерации искусственных данных используйте следующую информацию:  $\epsilon$  распределен как  $N(0, \sigma^2)$  независимо от  $(x_1, x_2)^f$ , который в свою очередь распределен как  $N(0, I_2)$ . Параметры  $\sigma^2 = 3, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0.5$ . Конечно же эта информация не может использоваться для нахождения аппроксимаций или построения интересных статистик, поскольку потенциальный исследователь не имеет к ней доступа.

- (a) Какое асимптотическое распределение у  $\hat{\theta}$ ? Выведите формулу для  $t_{\hat{\theta}}$  для теста на равенство  $\theta$  своему реальному значению (опять же, вы не можете использовать информацию о процессе получения данных, и даже об условной гомоскедастичности!).
- (b) Сгенерируйте выборку  $n = 4$  наблюдений  $\{(x_{1i}, x_{2i}, y_i)^f\}_{i=1}^n$  согласно их совместному распределению. Рассчитайте  $\hat{\theta}$  и  $t_{\hat{\theta}}$  для этой выборки. Повторите это  $R = 10,000$  раз. Теперь у вас есть коллекция из  $R$  значений для  $\hat{\theta}$  и  $t_{\hat{\theta}}$ . Это симулированные точные распределения.
- (c) Постройте на одном графике асимптотическое и симулированное точное кумулятивное распределение. Как точно асимптотическое распределение совпадает с симулированным точным распределением? Будет ли отличаться ваш ответ для  $\hat{\theta}$  и  $t_{\hat{\theta}}$ .
- (d) Повторите процесс для частей (b) и (c) при  $n = 20$ . Обсудите роль размера выборки для качества аппроксимации.

### Домашнее задание 3.

Общий вес работы: 100 баллов.

1. (30 баллов) Асимптотика результатов регрессии.

Рассмотрим простую парную регрессию среднего:

$$y = \alpha + \beta x + e,$$

где  $E[e|x] = 0$  и  $x$  не константа. Допустим мы имеем случайную выборку  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ . Пусть  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})^f$  – МНК (OLS) оценивание для пары  $(\alpha, \beta)^f$ . Остатки регрессии  $\hat{e} = y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i$  для  $i = 1, \dots, n$ .

Выведите асимптотическое распределение для следующих статистик:

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2,$$

где  $\bar{y}_n$  – выборочное среднее для  $y$  и

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2.$$

Используя ваши результаты выведите асимптотическое распределение  $R^2$  регрессии:

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_y^2}.$$

2. (30 баллов) Данные CPS.

Изучите раздел 3.19 в книге *Econometrics* Б. Хансена (Hansen). Скачайте данные CPS (текстовая версия) с веб-страницы книги.

- Сделайте упражнение 3.22(a).
- Сделайте упражнение 3.24(a). Выпишите коэффициенты и робастные стандартные ошибки. Постройте 95% асимптотический доверительный интервал для отдачи на от одного года образования.
- Предскажите логарифм зарплаты для белого женатого мужчины испанского происхождения с Запада, имеющего 12 лет образования и 20 лет опыта. Постройте 95% доверительный интервал для этого предсказания.

3. (40 баллов) Спотовые и форвардные курсы валют.

На [my.nes.ru](http://my.nes.ru) размещены файлы FwdSpot1.dat и FwdSpot3.dat. Первый содержит ежемесячные спотовые цены одномесечных форвардных курсов валют, второй ежемесячные спотовые цены трехмесячных форвардных курсов, в формате \$/иностранная валюта, для британского фунта, французского франка и японской йены за 1973:3 - 1992:8 (234 наблюдений). Каждая

строчка содржии месяц, год, спотовые цены фунта франка и йены, и форвардные курсы соответствующих валют. Скачайте данные и возьмите логарифмы курсов.

Нам интересно протестировать гипотезу об условной несмещенности:

$$E_t s_{t+k} = f_{t,k}, \quad (1)$$

где  $s_t$  – спотовый курс в месяц  $t$ ,  $f_{t,k}$  – форвардный курс на  $k$  месяцев вперед, а  $E_t$  – математическое ожидание, условное на информацию в месяц  $t$ . Утверждение (1) говорит о том, что форвардный курс – условно несмещенный предиктор будущего спотового курса. Обычно, для того, чтобы протестировать это утверждение, (1) вкладывают в следующую эконометрическую модель:

$$s_{t+k} - s_t = \alpha + \beta(f_{t,k} - s_t) + e_{t+k}, \quad E_t[e_{t+k}] = 0 \quad (2)$$

и тестируют гипотезу  $H_0 : \alpha = 0, \beta = 1$ . Нынешняя спотовая ставка вычитается для достижения стационарности. Разница  $s_{t+k} - s_t$  называется обесценивание валютного курса, а разница  $f_{t,k} - s_t$  называется форвардной премией. Прделайте эти действия для трех валют, сравнивая все получаемые результаты.

Для обоих типов фовардов, оцените (2) при помощи МНК (OLS) и протестируйте условную несмещенность, используя асимптотическую теорию. Для трехмесячных форвардов, попробуйте оценивание долгосрочной дисперсии при помощи подходов Хансена-Ходрика (Hansen-Hodrick), Ньюи-Уэста (Newey-West), Эндрюса (Andrews) с помощью парзеновских ядерных оценок. Обсудите результаты тестов. Сравните критические значения, полученные разными оценками долгосрочной дисперсии. В случае больших расхождений, порассуждайте о возможных причинах.

### Домашнее задание 4.

Общий вес работы: 100 баллов.

1. (60 баллов) *Функция издержек.*

Файл Nerlove.dat соержит данные, используемые Марком Нерловом (Marc Nerlove) в анализе функции издержек для 145 американских электроэнергетических компаний. Переменные включают:

- # : Номер наблюдения
- C : Сумму издержек на производство, \$ млн.
- Q : Килловат-часы выпуска, млрд
- $P_w$  : Заработную плату в час
- $P_f$  Цену топлива, цент на миллион британских тепловых единиц (BTU)
- $P_k$  Цену аренды капитала

Нерлову было необходимо оценить функцию издержек  $C = f(Q, P_w, P_f, P_k)$ .

- (a) i. Оцените неограниченную спецификацию Кобба-Дугласа

$$E[\ln C | Q, P_w, P_f, P_k] = \alpha_1 + \alpha_2 \ln Q + \alpha_3 \ln P_w + \alpha_4 \ln P_f + \alpha_5 \ln P_k$$

при помощи МНК (OLS).

- ii. Рассчитайте 95% асимптотический и 95% (асимптотически наиболее точный) бутстраповский доверительный интервалы для  $\alpha_2$ . Сравните результаты и дайте им экономическую интерпретацию.
- (b) Протестируйте гипотезу  $H_0 : \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 1$  против  $H_a : \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 < 1$  на 5% уровне значимости
- i. используя асимптотическую теорию
  - ii. используя (асимптотически наиболее точный) бутстраповский подход

Прокомментируйте, как отличаются результаты разных подходов. Приведите экономическую интерпретацию результатов. [Замечание: для данной задачи больше подходит t-тест, нежели тест Вальда]

- (c) Переоцените модель, введя ограничение  $H_0$ , следуя шагам части (a). [Подсказка: если, вводя ограничение, вы исключите один параметр, то по-прежнему сможете получить стандартную ошибку и t-значение для нее.] Для оставшейся части задания, оставьте ограничение  $H_0$ .
- (d) Теперь испробуем следующую модель плавного перехода (smooth transition model). Рассмотрим ограниченную модель с дополнительным членом

$$\alpha_6 z,$$

где

$$z = \frac{\ln Q}{1 + \exp(-(\ln Q - \alpha_7))}$$

Оцените модель, следуя шагам части (а), и, используя метод концентрации (concentration method). [Подсказка: допустите, чтобы как минимум 10% значений  $\ln Q$  лежало левее потенциального  $\alpha_7$  и как минимум 10% значений  $\ln Q$  лежало правее потенциального  $\alpha_7$ , т.е. сначала изучите данные и выберите подходящие границы для  $\alpha_7$ .]

- (е) Для модели из части (d) рассчитайте среднее (по наблюдениям) предельное влияние переменной  $\ln Q$  на условное среднее  $\ln C$  и предельное влияние переменной  $\ln Q$  на условное среднее  $\ln C$  в точке выборочного среднего регрессоров. Насколько сильно отличаются значения?

2. (40 баллов) *Непараметрическое оценивание временной структуры.*

Файл Tbill.dat содержит ежемесячные данные о трехмесячных краткосрочных казначейских обязательствах (Treasury bills) (вторичный рынок)  $r_t$  за период с января 1965 по май 2007. В задании используйте оценивание Надарая-Уотсона (Nadaraya-Watson estimator) и ядро Епанечникова.

- (а) Непараметрически оцените условное математическое ожидание  $E[\Delta r_t | r_{t-1}]$  при помощи трех разных значений ширины окна (bandwidth): одного, ведущего к недостаточному сглаживанию (undersmoothing), одного, ведущего к чрезмерному сглаживанию (oversmoothing), и одному, наиболее оптимальному. Постройте на одном графике три оценки и данные исходной выборки (scatterplot). Также попробуйте эвристическую формулу Сильвермана. Дает ли она слишком маленькое или слишком большое значение ширины окна?
- (b) Непараметрически оцените условную дисперсию  $V[\Delta r_t | r_{t-1}]$  при помощи трех разных значений ширины окна (bandwidth): одного, ведущего к недостаточному сглаживанию (undersmoothing), одного, ведущего к чрезмерному сглаживанию (oversmoothing), и одному, наиболее оптимальному. Постройте на одном графике три оценки и данные исходной выборки (scatterplot).

## **Дисциплины по выбору**

---

## Введение в маркетинговую аналитику

---

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

Экзамен состоит из пятнадцати вопросов. Обозначьте каждое из следующих четырнадцати высказываний как *верно*, *неверно* или *неоднозначно*. Обоснуйте свои ответы несколькими предложениями. Пятнадцатый вопрос – открытый.

- Обратите внимание, что высказывания могут быть намеренно двусмысленными, некоторые из них могут не быть однозначно правдивыми или ложными, а некоторые из них имеют несколько аспектов, о которых нужно написать в ответе. Если вы считаете, что высказывание ложно, то постарайтесь найти и указать все ошибки.
  - Ваша оценка зависит от качества обоснования ваших ответов, а не от того, правильны или нет ваши ответы формально. Старайтесь ответить на все вопросы.
  - Время экзамена – 90 минут.
1. Комиссия по ценным бумагам (SEC) обвиняет компанию Goldman Sachs в незаконном сокрытии информации, которое заключалось в несообщении покупателям Abacus, что ипотечные облигации, лежащие в основе обеспеченных долговых обязательств (CDO), были отобраны с помощью Paulson&Co – одного из крупнейших мировых хедж-фондов.
  2. Уоррен Баффетт считает, что европейские пут опционы слишком дорогие, потому что вероятность этих бумаг оказаться <в деньгах> (in the money) на дату погашения крайне мала. В то же время, Фишер Блэк и Майрон Шоулз сказали бы, что Баффетт неверно представляет себе ценообразование деривативов.
  3. Fannie Mae не смогла обнаружить накопление рисков в своем портфеле накануне финансового кризиса. Компания не проводила тесты на стрессоустойчивость, которые стали обязательными только после принятия закона Додда-Франка – уже после кризиса.
  4. Стандартный нарратив демократов гласит, что низкие процентные ставки на протяжении 2000-х годов вели к увеличению склонности к принятию риска, что стало причиной глобального финансового кризиса 2008 – 2009 годов.

5. <Импульсные стратегии> (momentum strategies) очень сильно дестабилизируют рынок.
6. Тот факт, что и Berkshire Hathaway, и AIG потеряли кредитный рейтинг AAA при наступлении финансового кризиса, говорит о том, что обе компании совершили серьезные ошибки в сфере управления рисками.
7. The London Shark скупал крупные объемы краткосрочных страховок на облигации, финансируя подобное хеджирование путем продажи ценных бумаг, обеспеченных залогом недвижимости (mortgage-backed securities), в крупных объемах.
8. Кейнс предложил теорию хеджирования и спекуляции, названную нормальной бэквордацией, которая гласит, что для товаров надбавка за риск положительна: форвардные контракты обычно торгуются по цене ниже спотовой цены, ожидаемой на момент погашения.
9. Итальянские банки держат большое количество дефолтных и преддефолтных долговых обязательств, и многие инвесторы обеспокоены проблемой неработающего кредита (non-performing loan problem) в Италии. Ожидается, что когда экономическая ситуация в Европе нормализуется и процентные ставки начнут расти, балансы банков улучшатся, но пенсионная система столкнется с еще большими трудностями, чем раньше.
10. В своей знаменитой работе [Black and Scholes \[1973\]](#)<sup>1</sup> Фишер Блэк и Майрон Шоулз предлагают рассматривать корпоративные облигации и акции как опционы на рисковые активы компании. По той же логике ценообразования опционов, повышение волатильности корпоративных активов должно приводить к снижению ценности корпоративных акций, а также к снижению процентных ставок на корпоративные облигации (то есть, к повышению стоимости этих облигаций).
11. Вскоре после инаугурации Дональда Трампа Wall Street Journal сообщил, что <правительство США значительно сократит объем прямых военных займов ряду стран, в том числе Украине>. Официальные лица США уточнили, что прямые займы будут заменены кредитными гарантиями меньших объемов, что позволит странам-получателям покупать не меньше, а больше военного оборудования.
12. С 1996 года Норвегия откладывает выручку от добычи нефти и газа в Северном море в суверенный инвестиционный фонд, который инвестирует преимущественно за границей. С учетом нынешней геополитической ситуации и американских и европейских санкций, со стороны российского правительства было бы недальновидно принять сходную стратегию.

---

<sup>1</sup>Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973



- 
13. В наши дни многим местным и региональным пенсионным программам в США сильно не хватает финансирования. Вкладываясь в рискованные ценные бумаги, прямые инвестиции и облигации с низким кредитным рейтингом (private equity and junk bonds), они пытаются выйти в ноль за счет снижения цены пут опционов, которые они продают Корпорации гарантии пенсионного обеспечения (PBGC).
  14. России пришлось строить множество новых стадионов к Чемпионату мира по футболу 2018. Предположим, что для постройки стадиона государство выдало частной строительной компании кредит на сумму 300 миллионов долларов под ставку 6% с четырехлетним сроком погашения. Предположим, что российский государственный долг в рублях имеет ставку около 5%, а ожидаемый уровень инфляции – около 2%. Как экономист, предложите способ, с помощью которого государство смогло бы выполнить обязательства по субсидиям, встроенным в этот займ. Если необходимо, можете указать неучтенные предпосылки и выписать формулу.
  15. (Открытый вопрос) Вам дали задание помочь с составлением стратегического плана развития российской пенсионной системы в течение следующих 5-10 лет. Обозначьте аспекты, наиболее сильно нуждающиеся в реформе, и предложите набор конкретных действий. Подойдите к заданию разумно и творчески.

## **ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ**

### **Домашнее задание 1**

#### **Сделка Abacus и финансовый кризис 2008-2009**

Подготовьте ответы на вопросы (не более 2-3 страниц).

1. Какие аспекты сделки Abacus делают ее синтетическим обеспеченным долговым обязательством в квадрате (synthetic CDO squared)?
2. Почему, согласно Комиссии по ценным бумагам (SEC), Goldman Sachs совершил мошенничество? Перечислите аргументы Комиссии.
3. Признает ли Goldman Sachs обвинения Комиссии по ценным бумагам? Перечислите аргументы Goldman Sachs.
4. Почему Goldman Sachs предпочел выплатить штраф и внесудебно уладить дело?
5. Какие детали Акта о финансовой реформе (Financial Reform Act) направлены на нейтрализацию явлений, приведших к финансовому кризису? Какие детали Акта о финансовой реформе решают вопросы, поднятые сделкой Abacus?
6. Основываясь на отчете Комиссии по расследованию причин финансового кризиса (FCIC report), составленным демократическим большинством, и двух отчетах республиканского меньшинства, кто склонен считать сделку Abacus показательным символом финансового кризиса, республиканцы или демократы?

---

## Домашнее задание 2

### Деривативы. Баффет против AIG

Подготовьте ответы на вопросы (не более 2-3 страниц).

1. Согласно Лоуренсу Каннингему, в чем главное различие между Berkshire Hathaway и KKR?
2. Считает ли Уоррен Баффетт, что банки больше других типов бизнеса заслуживают государственной помощи для спасения от банкротства? Почему?
3. Что общего у стратегии Баффетта и стратегии <кэрри-трейд> (carry trade)?
4. Объясните сходства и различия бизнес-модели Уоррена Баффетта, бизнес-модели American International Group и Йельской инвестиционной стратегии. При ответе рассмотрите, в числе прочего, финансовые рычаги (leverage), корректировку цен по рынку (marking-to-market), ручное управление компаниями (hands-on management). Опционы рассмотрите в следующем вопросе).
5. Один из видов бизнес-моделей включает в себя продажу опционов <вне денег> (out-of-the-money) с надеждой на получение прибыли. Аналогичной стратегией является выписывание страхования. Согласно Баффетту, этим ли путем Berkshire Hathaway получает большую часть своей выручки? Согласно отчету Комиссии по расследованию причин финансового кризиса (FCIC report), такова ли была стратегия Гэри Гортонa, которой придерживалась American International Group?
6. Сравните страницу 16 открытого письма Баффетта держателям акций от 2009 года (опубликовано в 2010) со страницами 243-244 отчета о причинах финансового кризиса (FCIC report). Что Баффетт думает об управлении American International Group?
7. Что, по мнению Баффетта, не так с моделью Блэка-Шоулза? Прав ли он?

### **Домашнее задание 3**

## **Дело London Whale. Регулирование после финансового кризиса**

Подготовьте ответы на вопросы (не более 2-3 страниц).

1. Согласно работникам JP Morgan, планировал ли банк получать прибыль от <китовых сделок> (whale trades)?
2. Ситуация вокруг JP Morgan имеет больше общего с ситуацией вокруг American International Group во время финансового кризиса или с ситуацией вокруг Goldman Sachs во время сделки Abacus?
3. Основываясь на отчете Комиссии по расследованию причин финансового кризиса (FCIC report), составленным демократическим большинством, и двух отчетах республиканского меньшинства, кто склонен считать ситуацию с <лондонским китом> (London Whale) показательным символом финансового кризиса: республиканцы или демократы?
4. Что Фрейм, Кристофер и Уиллен (Frame, Kristopher and Willen) считают главными плюсами внедрения обязательных тестов на стрессоустойчивость? Каковы возможные трудности?
5. Что вы думаете о проводимой Банком России санации российской банковской системы? Каковы главные трудности? Каковы должны быть приоритеты?
6. Основываясь на докладе о состоянии итальянской банковской системы, сравните текущие ситуации вокруг неработающих кредитов (NPL) в Италии и России. Какие уроки для российских регулирующих органов можно извлечь?

---

## Домашнее задание 4

### Рынки валюты и сырьевых товаров. Хеджирование

Подготовьте ответы на вопросы (не более 2-3 страниц).

1. Почему Metallgesellschaft потерял деньги? Хеджировал ли Metallgesellschaft свои риски или спекулировал?
2. В каком объеме корпорации должны хеджировать свои риски?
3. Считаете ли вы используемые <Сбербанком> барьерные опционы адекватным инструментом структурирования хеджирующих сделок для <Транснефти> и <Мечела>? Что бы вы порекомендовали этим компаниям? Есть ли у стратегии <Сбербанка> с использованием барьерных опционов сходства с кэрри-трейдами, стратегией American International Group или стратегией Баффетта?
4. Может ли компания хеджировать ослабление доллара, используя опционы?
5. Должна ли компания хеджировать риски, если это дорого? К примеру, если цены на нефть находятся в состоянии стремительной бэквордации, должна ли нефтяная компания хеджировать свою будущую выручку?
6. Почему менеджерам по управлению рисками бывает сложно объяснить своим генеральным директорам пользу хеджирования?
7. Что такое рынки фиксированного дохода (FICC markets)?
8. Основываясь на обзоре Bank of England, каковы наиболее распространенные аспекты в недавних делах о нарушениях на рынках фиксированного дохода?

## **Домашнее задание 5**

### **Пенсионная система**

Подготовьте ответы на вопросы (не более 2-3 страниц).

1. Насколько уровень пенсионных пособий в Российской Федерации близок к их уровню в других странах?
2. Согласно Алексею Кудрину и Евсею Гурвичу, какие изменения необходимо провести в российской пенсионной системе, чтобы сделать её экономически сбалансированной и устойчивой? Согласны ли вы с этим?
3. Что нужно сделать, чтобы ускорить развитие российской пенсионной системы?
4. Можно ли утверждать, что корпоративные пенсионные фонды должны инвестировать только в облигации? Насколько такое утверждение опиралось бы на соображения о риске и доходности? Что насчет налоговых аспектов?
5. Если снижающиеся процентные ставки благоприятно сказываются на доходности облигаций, почему они могут плохо сказаться на финансовом статусе пенсионных фондов, которые активно инвестируют в облигации?
6. Если пенсионная программа инвестирует в акции, должно ли вознаграждение за риск включаться в подсчеты при определении того, в недостаточной или избыточной мере финансируется эта программа? Какая ставка должна использоваться при дисконтировании обязательств?
7. Какую общую роль опционы играют в определении недостаточного или избыточного финансирования? Как наличие пенсионного гаранта (как Корпорация гарантии пенсионного обеспечения (PBGC) в США) влияет на мотивацию компаний финансировать в недостаточной либо избыточной мере свои пенсионные программы с фиксированными выплатами?
8. Могут ли пенсионные программы страховать свои собственные портфели? Есть ли у такого подхода потенциальные проблемы?
9. Представьте локальную пенсионную программу (как в Греции или Пуэрто-Рико), которая инвестирует в рискованные активы, чтобы в будущем быть в состоянии расплачиваться по своим пенсионным обязательствам. Опишите гипотетическую страховую политику (пут-опцион), которая сгенерирует необходимый объем средств, если рискованные активы не принесут нужной для всех выплат суммы. Опишите фактический профицит пенсионного фонда (колл-опцион), который останется, если фонд получит больше выручки, чем необходимо для выплаты всех пенсий. Какую информацию о данной ситуации можно извлечь из принципа пут-колл паритета (put-call parity)?

## **Домашнее задание 6**

### **Государственные финансы**

Подготовьте ответы на вопросы (не более 2-3 страниц).

Рассматривайте государство как страховщика, который управляет широким портфелем финансовых активов, используя в некоторых ситуациях внутренних менеджеров, а в некоторых – внешних.

1. Как риски в портфеле правительства США соотносятся с рисками в портфеле суверенных инвестиционных фондов? В частности, заострите внимание на разнице <положительных> (социальная справедливость) и <отрицательных> (долг) результатов.
2. Насколько сильно ФРС походит на очень большой хедж-фонд? Насколько сильно её целевые ориентиры и стиль управления отличаются от таковых у хедж-фондов?
3. Сравните американскую программу выкупа токсичных активов (TARP) с крупным частным фондом прямых инвестиций? Отличаются ли их целевые ориентиры и стиль управления?
4. Сравните российский и американский подходы к правительственным субсидиям. Сконцентрируйтесь на их объеме, форме предоставления и способе организации.
5. Должно ли правительство России предоставлять кредиты отдельно выбранным российским компаниям или отраслям индустрии?
6. Согласно Евсею Гурвичу и Алексею Кудрину, каковы главные причины замедления роста российской экономики? Согласны ли с ними эксперты из Столыпинского клуба?

## **Домашнее задание 7**

### **Суверенные фонды благосостояния**

Подготовьте ответы на вопросы (не более 2-3 страниц).

Рассматривайте государство как страховщика, который управляет широким портфелем финансовых активов, используя в некоторых ситуациях внутренних менеджеров, а в некоторых – внешних.

1. Каковы основные политические проблемы, влияющие на принятие решений о том, как создавать суверенные инвестиционные фонды?
2. В чем различия между <норвежской моделью> и <Йельской моделью> Дэвида Свенсена?
3. Должна ли Норвегия использовать модель, которую использует фонд целевого капитала Йельского университета? Должен ли Йель использовать норвежскую модель? Есть ли причины, по которым Йельский университет и Норвегия должны использовать разные инвестиционные модели?
4. Россия должна использовать Йельскую или норвежскую модель или же попытаться выработать свой подход?
5. Какие главные уроки Россия может извлечь из дела <Ливия против Goldman Sachs>?



## КВИЗЫ

### 1. Квиз 1

После того, как сделка Abacus была структурирована и все стороны пришли к соглашению о разделении фундаментальных рисков, каждая из сторон должна была позаботиться еще об одном виде риска. В чем заключался этот риск, и как компания Goldman Sachs с ним справилась?

### 2. Квиз 2

Почему Уоррен Баффетт считает, что цены пут опционов на американский индекс акций завышены? Прав ли он?

### 3. Квиз 3

Как развивалась ситуация после того, как игроки на рынке узнали о крупных позициях J.P. Morgan на рынке кредитных деривативов? Каковы были действия J.P. Morgan и их последствия?

### 4. Квиз 4

Опишите проблемы тестов на стрессоустойчивость, проводимых компанией Fannie Mae. Опишите эконометрические, экономические и политэкономические аспекты проблем.

### 5. Квиз 5

Что значит, что форвардная кривая цен на нефть находится в состоянии бэквордации? Означает ли это, что спотовая цена на нефть в будущем возрастет?

## Вычислительная макроэкономика

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

Вопросы основаны на статье [Guerrieri and Iacoviello \[2015\]](#)<sup>1</sup>

Общий вес работы: 11 баллов.

1. (2 балла) Чтобы найти полное нелинейное решение модели реального делового цикла (RBC) с ограничениями на инвестиции, авторы статьи используют алгоритм итераций функции Беллмана на очень мелкой решетке для переменной капитала.
  - (a) (0.5 балла) Запишите уравнение Беллмана для RBC-модели с ограничением на инвестиции, опираясь на раздел 4.1 статьи. Точно задайте пространство состояний, целевую функцию и отображение допустимых значений.
  - (b) (1 балл) Кратко опишите алгоритм итераций функции Беллмана для вычисления функций Беллмана и оптимальной политики в данной модели.
  - (c) (0.5 балла) Укажите основные преимущества и недостатки данного подхода по сравнению с кусочно-линейным решением, предложенным в статье.
2. (3 балла) В статье предложен алгоритм получения кусочно-линейного решения моделей с иногда связывающими ограничениями.
  - (a) (0.5 балла) Почему подход возмущений первого порядка не применим к моделям с иногда связывающими ограничениями?
  - (b) (1 балл) Запишите линеаризованные системы (M1), (M2) и связанные с ними функции  $f$ ,  $g$  для простой линейной модели, описанной в разделе 2.4. Будьте точны при описании матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$ ,  $E^*$ .
  - (c) (1 балл) Алгоритм, предложенный в статье, состоит из 6 основных шагов. Кратко опишите их. Что конкретно в этом алгоритме требуется угадать и верифицировать?
  - (d) (0.5 балла) Назовите основные источники ошибок приближения, возникающих при использовании алгоритма. Какие из них наиболее проблематичны?

<sup>1</sup>Luca Guerrieri and Matteo Iacoviello. Occbin: A toolkit for solving dynamic models with occasionally binding constraints easily. *Journal of Monetary Economics*, 70:22–38, 2015

3. (2 балла) В статье используются два подхода к оценке численной точности линейных, кусочно-линейных и полностью нелинейных алгоритмов.
- (a) (0.5 балла) Что это за подходы? Кратко опишите их.
- (b) (0.5 балла) Какой алгоритм наиболее точен? Наименее точен? Объясните.
- (c) (1 балл) Объясните, почему если одно приближение решения модели лучше другого, то при его работе получается более высокий уровень полезности.
4. (4 балла) Рассмотрим простую модель малой открытой экономики. Репрезентативное домохозяйство максимизирует ожидаемую полезность на горизонте всей жизни:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t)$$

при бюджетных и долговых ограничениях:

$$c_t + b_{t+1} + \psi(b_{t+1}) = y_t + (1+r)b_t$$

$$b_{t+1} \geq -\varphi y^{ss},$$

где  $c_t$  обозначает потребление,  $b_{t+1}$  – вложения в безрисковый международный актив (отрицательное значение означает долг перед иностранным сектором),  $\psi(b) = \frac{1}{2}\psi b^2$  – издержки реструктуризации долга,  $r$  – безрисковая международная ставка процента ( $r = \frac{1}{\beta} - 1$ ). Уровень выпуска  $y_t$  описывается стохастическим процессом AR(1):

$$\log(y_t) = (1 - \rho) \log(y^{ss}) + \rho \log(y_{t-1}) + u_t, u_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Предположим, что  $\beta = 0.96$ ,  $\psi = 0.001$ ,  $\varphi = 0.1$ ,  $\rho = 0.9$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $y^{ss} = 5$ .

- (a) (1 балл) Запишите условия первого порядка, характеризующие равновесие в данной модели.  
Скачайте инструмент `OccBin`<sup>2</sup>, реализующий кусочно-линейный алгоритм. Обратите внимание, что для его использования потребуется `Dynare`. Внимательно ознакомьтесь с инструкцией `readme.pdf` и примерами решений при помощи `OccBin` моделей.
- (b) (2 балла) Используя `OccBin`, напишите программу для решения модели как в случае наличия долгового ограничения, так и в случае его отсутствия. Для обоих случаев изобразите импульсные отклики выпуска  $y_t$ , потребления  $c_t$ , вклада  $b_{t+1}$  и множителя Лагранжа  $\lambda_t$  в ответ на отрицательный шок  $u_t = -0.06$ , соответствующий 3 стандартным отклонениям. Что произойдет при положительном шоке такой же силы?
- (c) (1 балл) Объясните разницу в результатах двух рассмотренных моделей. Почему в модели с долговым ограничением в ответ на отрицательный шок потребление изначально падает, но затем быстро восстанавливается?

<sup>2</sup>[https://www2.bc.edu/matteo-iacoviello/research\\_files/occbin\\_20140630.zip](https://www2.bc.edu/matteo-iacoviello/research_files/occbin_20140630.zip)

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1

Общий вес работы: 20 баллов.

1. (10 баллов) *Детерминистическая модель роста с человеческим капиталом*

Рассмотрим детерминистическую версию неоклассической модели роста с накоплением человеческого капитала. Предположим, что рабочий может накапливать человеческий капитал  $h_{t+1}$ , только если он уменьшает время работы  $n_t$ . Факторами производства потребительского блага  $c_t$  являются человеческий капитал  $h_t$  и трудовые часы  $n_t$ . Оптимизационная задача репрезентативного агента имеет вид:

$$\max_{\{c_t, n_t, h_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} c_t &\leq f(n_t, h_t), \\ h_{t+1} &= (\lambda + \delta)(1 - n_t)h_t + (1 - \delta)h_t, \\ c_t \geq 0, 0 \leq n_t \leq 1, h_{t+1} &\geq 0, \forall t = 0, 2, \dots \end{aligned}$$

с заданной  $h_0 > 0$ .

Предположим, что функция полезности и производственная функция заданы и равны  $u(c) = c^\gamma / \gamma$  и  $f(n, h) = (nh)^\alpha$ . Пусть  $\beta = 0.96$ ,  $\alpha = 0.3$ ,  $\gamma = -1$ ,  $\delta = 0.02$  и  $\lambda = 0.03$ .

- (a) (1 балл) Запишите уравнение Беллмана для данной задачи. Точно задайте пространство состояний  $X$ , функцию потоков платежей  $F(x, x')$  и отображение допустимых значений  $\Gamma(x)$ .
- (b) (1 балл) Предположите, что  $\beta(1 + \lambda) < 1$ . Покажите, что существует уникальная непрерывная функция  $v$ , удовлетворяющая уравнению Беллмана.
- (c) (1 балл) Покажите, что уравнение Беллмана имеет аналитическое решение следующего функционального вида:  $v(h) = Ah^{\alpha\gamma}$ . Продемонстрируйте, что оптимальная политика – поддержание постоянных темпов роста человеческого капитала:  $g(h) = \theta(h)$ . Найдите  $A$  и  $\theta$ .
- (d) (4 балла) Пусть  $M = 100$  и  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_M\}$ , где  $h_0$  и  $h_M = 1$ , а расстояние между двумя последовательными точками из  $H$  постоянно. Напишите в MATLAB код, вычисляющий функцию Беллмана  $v_H(h)$  и правило оптимального решения  $h^t = g_H(h)$  путем итераций оператора Беллмана, ассоциированного с дискретной версией модели.

- (e) (1 балл) Воспользуйтесь графиками для сравнения аналитических и численных значений функции Беллмана и правила оптимальной политики. Изобразите абсолютные значения ошибок Эйлера.
- (f) (2 балла) Усовершенствуйте свой алгоритм, используя свойства функций Беллмана и оптимального правила, линейную интерполяцию функции ценностей между контрольными точками сетки.

## 2. (10 баллов) Стохастическая модель роста

Рассмотрим стохастическую версию неоклассической модели роста:

$$v(k, z) = \max_{k^t \in [0, f(k, z)]} \{u(f(k, z) - k^t) + \beta E[v(k^t, z^t)/z]\}$$

Пусть функция полезности и производственная функция заданы и равны  $u(c) = \frac{c^\gamma}{\gamma}$  и  $f(k, z) = \exp(z)k^\alpha + (1 - \delta)k$ . Шок производительности  $z$  описывается стохастическим авторегрессионным процессом AR(1):  $z^t = \rho z + E^t$ , где  $E^t$  – независимые, одинаково распределенные случайные величины (i.i.d.)  $\sim N(0, \sigma^2)$ . Пусть  $\beta = 0.9$ ,  $\gamma = -1$ ,  $\alpha = 0.3$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\rho = 0.85$  и  $\sigma = 0.05$ . Пусть  $M = 100$  и  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_M\}$ , где  $k_0 = 0.01\bar{k}$ ,  $k_M = 1.5\bar{k}$ ,  $\bar{k}$  – уровень капитала в детерминистическом стационарном состоянии, а расстояние между двумя последовательными точками из  $K$  постоянно.

- (a) (1 балл) Постройте цепь Маркова с 3 состояниями на множестве  $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ , которая аппроксимирует AR(1)-процесс для  $z$ . Запишите уравнения Беллмана для дискретной версии модели. Для решения задачи воспользуйтесь методом из статьи Tauchen [1986]<sup>1</sup>.
- (b) (4 балла) Напишите код в MATLAB, который получает численное решение стохастической модели роста при помощи итераций функции Беллмана. Приведите два алгоритма: с линейной интерполяцией функции Беллмана и без нее. Изобразите на графике вычисленные функции Беллмана и оптимальной политики.
- (c) (2 балла) Предположим, что один период модели равен кварталу. Реализуйте симуляцию экономики на 50 лет (на 200 периодов). Изобразите на графике одну стохастическую реализацию для данной экономики  $\{y_t, c_t, i_t, k_t\}_{t=0}^{199}$  с начальным состоянием  $z_0 = 0$ ,  $k_0 = \bar{k}$ . Используйте фильтр Ходрика-Прескотта с  $\lambda = 1600$  для вычисления логарифмов отклонений симулированных данных  $\{y_t, c_t, i_t, k_t\}$  от их HP(1600)-трендов. Изобразите полученные отклонения на графике.
- (d) (3 балла) Получите 100 независимых стохастических реализаций экономики и напишите в MATLAB код, вычисляющий статистики, описывающие колебания делового цикла относительно  $\{y_t, c_t, i_t, k_t\}$ . Для решения задачи воспользуйтесь следующими материалами:

<sup>1</sup>George Tauchen. Finite state markov-chain approximations to univariate and vector autoregressions. *Economics Letters*, 20(2):177–181, 1986

- Hansen [1985]<sup>2</sup>;
- Kydland and Prescott [1990]<sup>3</sup>.

---

<sup>2</sup>Gary D Hansen. Indivisible labor and the business cycle. *Journal of Monetary Economics*, 16(3): 309-327, 1985

<sup>3</sup>Finn E Kydland and Edward C Prescott. Business cycles: Real facts and a monetary myth. *Real Business Cycles: A Reader*, 383, 1990

## Домашнее задание 2

Общий вес работы: 20 баллов.

### 1. (10 баллов) Задача линейно-квадратических приближений

Рассмотрим стохастическую модель роста с делимым трудом, описанную в статье Hansen [1985]<sup>1</sup>:

$$\max_{\{c_t, n_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - n_t)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} c_t + i_t &\leq z_t k_t^\theta n_t^{1-\theta}, \\ k_{t+1} &= i_t + (1 - \delta)k_t, \\ z_{t+1} &= \gamma z_t + E_{t+1}, \ln(E_t) \sim N(\mu, \sigma^2), \end{aligned}$$

где  $c_t \geq 0$ ,  $0 \leq n_t \leq 1$ ,  $k_0$  задан. Предположим, что функция полезности имеет вид  $u(c_t, 1 - n_t) = \log(c_t) + A \log(1 - n_t)$ . Пусть  $\beta = 0.99$ ,  $A = 2$ ,  $\theta = 0.36$ ,  $\delta = 0.025$  и  $\gamma = 0.95$ .

Отметим, что шоки продуктивности имеют лог-нормальное распределение со средним значением  $E(E_t) = m = 1 - \gamma$  и дисперсией  $V(E_t) = v = 0.00712^2$ . Тогда  $\ln(E_t) \sim N(\mu, \sigma^2)$ , где  $\sigma^2 = \ln(\frac{v}{m^2} + 1)$  и  $\mu = \ln(m) - \frac{1}{2}\sigma^2$ .

- (a) (5 баллов) Напишите программу в MATLAB, которая использует алгоритм линейно-квадратических приближений для воспроизведения статистик деловых циклов, полученных для экономики с делимым трудом (эти данные находятся в 3 и 4 колонках Таблицы 1 из статьи).
- (b) (5 баллов) Модифицируйте свою программу для воспроизведения статистик, полученных для экономики с неделимым трудом (колонки 5 и 6 Таблицы 1 из статьи). Учитывайте, что репрезентативный агент в данной постановке модели обладает функцией полезности  $u(c_t, n_t) = \log(c_t) + B(1 - n_t)$ , где  $B = -A \frac{\log(1-h_0)}{h_0}$  и  $h_0 = 0.53$ .

### 2. (10 баллов) Лог-линейное приближение при помощи Dynare

Задача 6.3 в учебнике Heer and Maussner [2009]<sup>2</sup>: Рассмотрим модель с переменной нормой использования капитала  $u_t$  и вторым шоком, отражающим экзогенные изменения в ценах на импортируемую нефть  $p_t$  (заимствовано из модели Finn [1995]<sup>3</sup>). Репрезентативный агент решает задачу:

$$\max_{\{C_t, N_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\ln C_t + \theta \ln(1 - N_t))$$

<sup>1</sup>Gary D Hansen. Indivisible labor and the business cycle. *Journal of Monetary Economics*, 16(3): 309–327, 1985

<sup>2</sup>Burkhard Heer and Alfred Maussner. *Dynamic general equilibrium modeling: computational methods and applications*. Springer Science & Business Media, 2009

<sup>3</sup>Mary G Finn. Variance properties of solow's productivity residual and their cyclical implications. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 19(5-7):1249–1281, 1995

при ограничениях:

$$\begin{aligned}
 K_{t+1} &= (Z_t N_t)^\alpha (u_t K_t)^{1-\alpha} + (1 - \delta(u_t)) K_t - C_t - p_t Q_t, \\
 \delta(u_t) &= \frac{u_t^\gamma}{\gamma}, \\
 \frac{Q_t}{K_t} &= \frac{u_t^\zeta}{\zeta}, \\
 \ln Z_t &= \ln Z + \ln Z_{t-1} + E_t^Z, E_t^Z \sim N(0, \sigma^Z), \\
 \ln p_t &= \rho^p \ln p_{t-1} + E_t^p, E_t^p \sim N(0, \sigma^p)
 \end{aligned}$$

с заданным уровнем капитала  $K_0$ .  $C_t$  обозначает потребление в периоде  $t$ ,  $N_t$  – рабочие часы,  $K_t$  – запас капитала, а  $Q_t$  – количество нефти, импортированной по цене  $p_t$ . Более интенсивное использование капитала повышает величину требуемой энергии на единицу капитала. Тогда, если повышается цена нефти, использование капитала падает.

В данной модели трудоинтенсивный технический прогресс описывается случайным блужданием с дрейфом  $\ln Z$ . Определим следующие стационарные переменные:  $c_t = \frac{C_t}{Z_t}$ ,  $k_t = \frac{K_t}{Z_{t-1}}$  и  $z_t = \frac{Z_t}{Z_{t-1}}$ .

Переменные состояния модели –  $k_t$ ,  $z_t$  и  $p_t$ . Используйте следующие значения параметров, взятые из Finn [1995]:  $\beta = 0.9542$ ,  $\theta = 2.1874$ ,  $\alpha = 0.7$ ,  $\gamma = 1.4435$ ,  $\zeta = 1.7260$ ,  $\rho^p = 0.9039$ ,  $\sigma^p = 0.0966$ ,  $Z = 1.0162$ ,  $\sigma^Z = 0.021$ .

- (2 балла) Запишите условия равновесия, характеризующие данную модель. Найдите стационарное состояние.
- (2 балла) Запишите лог-линейное приближение модели в окрестности стационарного состояния.
- (2 балла) Решите модель, используя алгоритм возмущений первого порядка, реализованный в Dynare. Запишите вычисленные правила оптимальной политики для переменных состояния и контрольных переменных.
- (2 балла) Постройте графики импульсных откликов эндогенных переменных в ответ на шоки производительности и цен на нефть,  $E_t^p$  и  $E_t^Z$ . Покажите, что если цена на нефть растет, коэффициент использования капитала падает. Интерпретируйте полученные результаты.
- (2 балла) Вычислите статистики деловых циклов модели.



### Домашнее задание 3

#### Модель Айягари с эндогенным трудом

Общий вес работы: 10 баллов.

1. (2 балла) *Индивидуальное правило политики домохозяйства*

Пусть эффективность труда  $s$  описывается цепью Маркова с двумя состояниями  $\{e = 1, u = 0.5\}$  и матрицей переходных вероятностей:

$$\Pi = \begin{matrix} & e & u \\ e & 0.97 & 0.03 \\ u & 0.5 & 0.5 \end{matrix}$$

Если в момент времени  $t$  реализацией процесса является  $s_t$ , то в этом периоде домохозяйство получает доход от труда  $w s_t l_t$ , где  $l_t$  обозначает предложение труда.

Мы ограничиваем вклады в единственный актив сеткой

$$K = [0, k_1, k_2, \dots, k_{max}].$$

Для заданных значений  $(w, r)$  и заданных начальных значений  $(k_0, s_0)$  домохозяйство выбирает  $\{k_{t+1}, c_t, l_t\}_{t=0}^{\infty}$  с целью максимизации

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^\gamma (1 - l_t)^{1-\gamma}}{1 - \sigma}$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} c_t + k_{t+1} &= (1 + r)k_t + w s_t l_t \\ k_{t+1} &\in K, \end{aligned}$$

где  $\beta = 0.99$ ,  $\sigma = 2$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $k_{max} = 10$ .

(а) Запишите уравнение Беллмана для данной задачи.

(б) Напишите в MATLAB функцию, вычисляющую правила оптимальной политики  $k^t = g^k(s, k; r, w)$ ,  $c = g^c(s, k; r, w)$  и  $l = g^l(s, k; r, w)$  для любых значений  $(w, r)$ . Используйте алгоритм итераций функции Беллмана.

2. (3 балла) *Инвариантные распределения цепей Маркова*

Определим безусловное распределение пар  $(k_t, s_t)$ ,  $\lambda_t(k, s) = P(k_t = k, s_t = s)$ . Экзогенная цепь Маркова  $\Pi$  на  $s$  и функция оптимальной политики  $k^t = g^k(k, s; w, r)$  индуцируют закон движения для распределения  $\lambda_t$ , а именно:

$$\lambda_{t+1}(k^t, s^t) = \sum_k \sum_s \lambda_t(k, s) \Pi(s, s^t) \mathbb{I}(k^t, s, k),$$

где мы определяем функцию-индикатор как:

$$\mathbb{I}(k^t, s, k) = \begin{cases} 1, & k^t = g^k(k, s; w, r); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- (a) Напишите в MATLAB функцию, вычисляющую инвариантное распределение  $\lambda(k, s)$  путем итераций уравнения, описывающего закон движения распределения  $\lambda_t$  для любых значений  $(w, r)$ .
- (b) Напишите в MATLAB функцию, для любых значений  $(w, r)$  конструирующую цепь Маркова, описывающую совместную эволюцию пар  $(k, s)$ . Вычислите инвариантное распределение этих пар. Сравните результаты работы алгоритмов из пунктов (a) и (b).

### 3. (5 баллов) Стационарное равновесие в модели Айягари

Агрегированная производственная функция определяет ставки аренды капитала  $r + \delta$  и заработной платы  $w$  из предельных условий:

$$w \frac{K}{L} = (1 - \alpha) \frac{K}{L}^\alpha,$$

$$r \frac{K}{L} = \alpha \frac{K}{L}^{\alpha-1} - \delta,$$

где  $\alpha = 0.3$  – доля капитала в доходах,  $K$  – агрегированный капитал,  $L$  – агрегированный труд и  $\delta = 0.01$  – норма износа капитала.

Напишите в MATLAB программу, вычисляющую стационарное равновесие в модели Айягари с эндогенным трудом:  $K$ ,  $L$ , реальную процентную ставку  $r$ , реальную зарплату  $w$ , функции политики домохозяйств  $k^t = g^k(k, s)$ ,  $l = g^l(k, s)$  и такое инвариантное распределение  $\lambda(k, s)$ , что:

$$K = \int g^k(k, s) \lambda(k, s),$$

$$L = \int_{k,s} s g^l(k, s) \lambda(k, s).$$

- (a) Для фиксированного значения  $\frac{K}{L} = k = k_j$  при  $j = 0$  вычислите  $(w, r)$  из уравнения предельных условий. Затем решите оптимизационную задачу домохозяйства. Используйте оптимальную политику  $g_j^k(k, s)$  для вывода ассоциированного стационарного распределения  $\lambda_j(k, s)$ .
- (b) Вычислите средние значения труда и капитала, связанные с распределением  $\lambda_j(k, s)$ , а именно:

$$K_j^* = \int g_j^k(k, s) \lambda_j(k, s),$$

$$L_j^* = \int_{k,s} s g_j^l(k, s) \lambda_j(k, s).$$

- (c) Для фиксированного параметра релаксации  $\xi \in (0, 1)$  вычислите новую оценку  $k$  из уравнения

$$k_{j+1} = \xi k_j + (1 - \xi) \frac{K_j^*}{L_j^*}.$$

- 
- (d)  $\text{I}p\text{O}B\text{O}, [\text{HTE} \text{HTepa}[\text{HH} \text{ITO}, [\text{aHHOII} \text{CXeMe}, \text{IIOKa} \text{M}0,11\text{€Jib He COII}, 11\text{€TC5!} \text{K CTa}[\text{H-}$   
 $\text{OHapHOMY paBHOB} \text{E} \text{CH!O}.$

## Деривативы

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

Общий вес: 100 баллов.

#### 1. (22 балла) Валютные форварды

Текущий курс USD/RUB составляет 56. Безрисковые процентные ставки для RUB и USD составляют 6% и 0%.

- (a) (3 балла) Определите 6-месячную форвардную ставку для обменного курса USD/RUB.
- (b) (5 баллов) Банк заключает форвардный контракт на продажу 10м USD по 6-месячной форвардной ставке (посчитанной в (a)). Через 5 месяцев обменный курс повысился до 60 USD/RUB, а процентная ставка для USD выросла до 1%. Проведите переоценку форвардного контракта на основе текущих рыночных условий.
- (c) (6 баллов) Предположим только для этого задания, что рыночная форвардная ставка в пункте (a) составляет 56 USD/RUB. Подразумевает ли это арбитраж? Если да, подробно объясните, как бы вы его реализовали и сколько бы вы заработали на форвардном контракте с номиналом 1 USD.
- (d) (8 баллов) Компании требуется купить USD в будущем согласно следующему графику:

$t, Y$	Объем, м USD
1	1
2	1
3	3

С целью избежать валютного риска, компания вступает в пар-форвардный контракт с банком. Какую ставку должен запросить банк?

#### 2. (13 баллов) Опционы

Текущий валютный курс USD/RUB составляет  $S = 60$ . Безрисковые процентные ставки составляют 5% для RUB и 0% для USD (простое начисление процентов).

- (a) (3 балла) Что дороже, 1Y колл-опцион с  $K = 64$  или 1Y пут-опцион с  $K = 64$ ? Располагаете ли вы достаточной информацией, чтобы ответить на этот вопрос? Если нет, какая дополнительная информация вам понадобится?

- (b) (4 балла) Что дороже, 1Y колл-опцион с  $K = 64$  или 1Y пут-опцион с  $K = 63$ ? Располагаете ли вы достаточной информацией, чтобы ответить на этот вопрос? Если нет, то какая дополнительная информация вам понадобится?
- (c) (4 балла) Вы продали ATM колл- и пут-опционы. На следующий день цена базового актива:
- сильно увеличивается;
  - остается такой же;
  - незначительно уходит вниз;
  - волатильность сильно снижается;
  - волатильность сильно возрастает.

Промаркируйте каждый из предложенных сценариев с помощью следующих символов: ++ (крайне положительно влияет на доходы), + (относительно хорошо влияет на доходы),  $n$  (нейтрально влияет на доходы), – (относительно негативно влияет на доходы), –– (крайне негативно влияет на доходы).

- (d) (2 балла) Каким образом должны себя повести волатильность и цена базового актива, чтобы состоялся:
- Лучший исход?
  - Худший исход?

### 3. (27 баллов) Биномиальная модель

Текущий обменный курс USD/RUB составляет  $S = 60$ . Безрисковые процентные ставки составляют 6% для RUB и 0% для USD (непрерывное начисление процентов). Волатильность равна 20%.

- (a) (3 балла) Постройте трехпериодное биномиальное дерево для  $T = 3$  месяца (также вычислите  $u$ ,  $d$ ,  $p$  и вероятности всех узлов).
- (b) (3 балла) Посчитайте цену европейского пут-опциона со сроком погашения  $T = 2$  месяца.
- (c) (7 баллов) Рассчитайте цену барьерного колл-опциона с активацией на уровне  $B = 58$  USD. Срок погашения 3 месяца.
- (d) (3 балла) Рассчитайте цену этого опциона в момент времени  $t = 1$  месяц, если цена базового актива падает по отношению к цене в момент времени  $t = 0$ .
- (e) (3 балла) Посчитайте цену опциона, который платит 100 RUB, если  $S_T > 60$  за  $T = 1$  месяц.
- (f) (5 баллов) Посчитайте цену опциона, который платит \$100, если  $S_T > 55$  за  $T = 3$  месяца.
- (g) (3 балла) Как можно захеджировать этот опцион в момент времени  $t = 0$ ?

## 4. (38 баллов) Опционы и SP

Текущий валютный курс USD/RUB составляет  $S = 56$ . Безрисковые процентные ставки составляют 6% для RUB и 2% для USD (сложное начисление процентов).

- (a) (3 балла) Нефтяная компания покупает пут-опционы на нефть. Является ли это прямым или обратным риском для контрагентов? Объясните, почему.
- (b) (3 балла) Нефтяная компания покупает форвардные контракты на нефть. Является ли это прямым или обратным риском для контрагентов? Объясните, почему.
- (c) (5 баллов) Посчитайте текущую цену производного инструмента, который платит вам 1м RUB, если  $S_T > 70$  через год.
- (d) (5 баллов) Приведите альтернативное решение для пункта (c).
- (e) (8 баллов) Рассмотрим 6-месячный DCD (двойной/мультивалютный депозит). Номинал – 1000 RUB. Если USD меньше  $K$ , держатель получает обратно номинал в USD, который обменяли по  $K$ . Посчитайте  $K$ . Посчитайте такой  $K$ , чтобы достичь 5%-ое увеличение доходности.
- (f) (7 баллов) Посчитайте текущую цену производного инструмента, который предоставляет вам опцию продать \$1м за 56м RUB, если  $S_T < 50$  через 1 год.
- (g) (7 баллов) Посчитайте текущую цену производного инструмента, который платит вам:
- \$1м если  $S_T < 56$ ;
  - 56 м RUB если  $S_T > 56$ .

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1

Общий вес: 33 балла.

#### 1. (7 баллов) Форвард с неизвестным страйком

Ценная бумага платит  $S(T_2) - S(T_1)$  в момент времени  $T_2$  ( $0 < T_1 < T_2$ ).  $S(t)$  – цена базового актива в момент времени  $t$ , а  $r$  – годовая безрисковая процентная ставка.

- (a) (4 балла) Предположим, что ценная бумага не платит дивиденды. Какова ее текущая цена (при  $t = 0$ )?
- (b) (2 балла) Теперь предположим, что ценная бумага выплачивает дивиденды  $I_t$  в момент времени  $t$  до  $T_1$ . Какова ее текущая цена в этом случае?
- (c) (1 балл) Если дивиденды выплачиваются в момент времени  $T_1 < t < T_2$ , какой становится цена ценной бумаги?

#### 2. (10 баллов) Форвард

Текущий курс EUR/USD равен  $S = 1.2$ . Безрисковые процентные ставки – 2% для EUR и 1% для USD (непрерывное начисление процентов).

- (a) (2 балла) Определите 6-месячную форвардную ставку по обменному курсу EUR/USD.
- (b) (4 балла) Банк заключает форвардный контракт на покупку 10м USD по 6-месячной форвардной ставке (посчитанной в пункте (a)). Через 3 месяца обменный курс снизился до 1,1, а процентная ставка для USD выросла до 2%. Проведите переоценку форвардного контракта на основе текущих рыночных цен.
- (c) (4 балла) Предположим, что рыночная форвардная ставка в пункте (a) составляет 1,2 EUR/USD. Подразумевает ли это арбитраж? Если да, подробно объясните, как бы вы его реализовали и сколько бы вы заработали на форвардном контракте с номиналом 1м EUR.

#### 3. (8 баллов) Фьючерсы

Рассмотрим 6-месячный фьючерсный контракт на акцию XYZ. Текущая цена акции составляет 30 USD, акция выплатит дивиденды в размере 0,40 USD на акцию через 1 месяц и затем еще раз в размере 0,40 USD через 3 месяца после выплаты первых дивидендов (4 месяца с текущей даты).

- (a) (2 балла) Посчитайте 6-месячную цену фьючерса на акцию при условии, что годовая безрисковая процентная ставка составляет 4,5% с непрерывным начислением процентов.

- (b) (2 балла) Предположим, что мы открыли длинную позицию по фьючерсному контракту, и через несколько минут появляется сообщение о том, что компания XYZ приобретается другой компанией, что заставляет (спот) цену акций упасть до 35,00. Посчитайте, сколько мы заработали на этом фьючерсном контракте.
- (c) (4 балла) Предположим, что вместо фьючерсного контракта мы приобрели форвардный контракт. Посчитайте, сколько мы заработали на этом форвардном контракте.

4. (8 баллов) *Пар-форвардный контракт*

Текущий курс EUR/USD равен  $S = 1.2$ . Безрисковые процентные ставки – 2% для EUR и 1% для USD (непрерывное начисление процентов). Компания заключает форвардный контракт по паритетным условиям с банком на покупку EUR за USD (через год (1Y) мы покупаем 1м EURO и так далее) по следующему графику:

1Y	2Y	3Y
1м	2м	3м

- (a) (4 балла) Рассчитайте справедливый обменный курс  $K$  для форварда, представив его как комбинацию трех форвардных контрактов с тем же страйком  $K$  для разных сроков погашения.
- (b) (2 балла) Рассчитайте справедливый обменный курс  $K$  для форварда напрямую: вычислите PV денежных потоков и найдите  $K$ , который делает  $PV = 0$ .



## Домашнее задание 2

Общий вес: 40 баллов.

1. (5 баллов) *Выпуклость денежного потока*  
Докажите свойство выпуклости цен на европейские колл-опционы.
2. (10 баллов) Цена европейского колл-опциона, срок действия которого истекает через шесть месяцев со страйком 27 USD, составляет 2 USD. Цена базовой акции составляет 26 долларов США. Акция заплатит дивиденды дважды – 0,8 USD через два месяца и 0,8 USD через четыре месяца. Временная структура является плоской: все годовые процентные ставки равны 11% с непрерывным начислением процентов.
  - (a) (4 балла) Посчитайте цену европейского пут-опциона, срок действия которого истекает через шесть месяцев со страйком 27 USD.
  - (b) (6 баллов) Подробно опишите арбитражные возможности при условии, если цена европейского пут-опциона равна 4 USD.
3. (4 балла) Цена колл-опциона, срок действия которого истекает через 3 месяца – 3 USD со страйком 60 USD. Базовая цена акции составляет 63 USD. Безрисковая годовая процентная ставка составляет 6% с непрерывным начислением процентов. Подразумевает ли это арбитраж? Если арбитраж возможен, подробно объясните, как бы вы его реализовали и сколько бы вы заработали.
4. (4 балла) Рассмотрим следующую комбинацию опционов: покупка колл-опциона со страйком  $K_1$ , продажа колл-опциона со страйком  $K_2$ , покупка пут опциона со страйком  $K_2$  и продажа пут-опциона со страйком  $K_1$  ( $K_2 > K_1$ ). Это комбинация бычьего колл-спреда (комбинация покупки опциона колл с большей внутренней стоимостью и продажи опциона колл с меньшей внутренней стоимостью) и медвежьего пут-спреда (комбинация покупки опциона пут с большей внутренней стоимостью и продажи опциона пут с меньшей внутренней стоимостью). Располагаете ли вы достаточным количеством информации, чтобы посчитать текущую цену этого продукта? Если да, рассчитайте цену. Если нет, скажите, какая дополнительная информация вам нужна?
5. (17 баллов) Текущая цена акции составляет 100 USD, страйк составляет 100 USD для всех опционов, процентная ставка – 10%, волатильность – 40% (дивидендов нет).
  - (a) (3 балла) Постройте трехпериодное биномиальное дерево для  $T = 3$  (также вычислите  $u$ ,  $d$ ,  $p$  и вероятности всех узлов).
  - (b) (2 балла) Посчитайте цену европейского пут-опциона со сроком погашения  $T = 3$  месяца.

- (c) (3 балла) Посчитайте цену американского пут-опциона со сроком погашения  $T = 3$  месяца.
- (d) (3 балла) Рассчитайте цену барьерного пут-опциона с активацией на уровне  $B = 110$  USD. Срок погашения = 3 месяца.
- (e) (4 балла) Посчитайте дельту этого опциона в момент времени 0. Продемонстрируйте, как можно захеджировать риск опциона в течение первого месяца.
- (f) (2 балла) Рассчитайте цену цифрового опциона, который платит 100 USD, если  $S_T > 100$  USD при  $T = 3$  месяца.

### Домашнее задание 3

Общий вес: 71 балл.

1. (15 баллов) *Историческая волатильность*
  - (a) (8 баллов) Рассчитайте историческую волатильность цен акций Apple за последний год. Какова стандартная ошибка вашей оценки? Предположим, что в году 252 рабочих дня, так что  $\Delta t = 1/252$ . Безрисковая процентная ставка для USD равна 2%.  
Отсюда можно выгрузить данные: <https://finance.yahoo.com/quote/AAPL/history?p=AAPL>
  - (b) (7 баллов) Посчитайте прогнозную волатильность колл-опциона <на деньгах> (*at the money option*) Google для всех доступных сроков погашения до 1 года. Постройте график временной структуры прогнозной волатильности. Сравните прогнозную и историческую волатильности (предполагается, что дивидендов нет).
  
2. (15 баллов) Стандартный барьерный нокаут колл-опцион (*knock-out call option*) работает следующим образом: когда барьер  $B$  пробивается снизу в течение срока действия опциона, опцион перестает действовать. Для этого случая существует комплексное аналитическое решение. Что если рассматривать барьерный нокаут колл-опцион европейского типа? Посчитайте цену барьерного нок-аут колл-опциона, который перестает действовать, если цена акции становится больше  $B$  в момент погашения. Выплаты определяются формулой:  $(S_T - K)^+ \cdot I_{S_T < B}$ .
  - (a) (10 баллов) Выведите аналитическое решение с помощью интеграла выплаты по плотности  $S_T$  (аналогично выводу формулы BS).
  - (b) (5 баллов) Представьте опцию в виде комбинации бинарного и колл-опционов и найдите его цену. Приводят ли два разных подхода к одному и тому же ответу?
  
3. (5 баллов) Вычислите дельту пут-опциона, взяв производную формулы BS для этого опциона.
  
4. (5 баллов) Рассмотрим акцию с ценой 100 USD, волатильностью 30% (без дивидендов). Процентная ставка составляет 3%. Рассчитайте цену контракта с гарантированным возвратом и сроком погашения через год.
  - (a) Когда  $S_T > S_0$  (позитивный доход), контракт выплачивает в два раза больше, чем акция: выплата =  $S_0 + 2(S_T - S_0)$ .
  - (b) Когда  $S_T < S_0$  (негативный доход), потери с контрактом в два раза меньше, чем потери самой акции: выплата =  $S_0 + 0.5(S_T - S_0)$ .

Рыночные данные для заданий 5-8: текущий курс EUR/USD равен  $S = 1,2$ ; безрисковые процентные ставки составляют 2% для EUR и 3% для USD (непрерывное начисление процентов), волатильность – 10%.

5. (5 баллов) Предположим простое начисление процентов только для этой задачи. Рассмотрим 3-месячный DCD (двойной/мультивалютный депозит). Номинал – 1000 USD. Если EUR падает ниже 1,15, держатель не получает процентную ставку. Рассчитайте увеличение доходности.
6. (10 баллов)
  - (a) (4 балла) Рассчитайте текущую цену производного инструмента, который платит 1м евро, если  $1,2 < S(T) < 1,3$  при  $T = 1Y$ .
  - (b) (6 баллов) Приведите альтернативное решение этого задания.
7. (4 балла) Предположим, у вас есть 10м USD, и вы планируете обменять их на евро, если обменный курс будет ниже 1,15 USD/EUR. Вы решаете продать некоторое количество пут-опционов на валютную пару USD/EUR со страйком 1,15 и сроком погашения один год: если ставка упадет ниже 1,15 за год, вы продадите доллары по курсу 1,15, если же курс будет выше, вы продолжите держать доллары.
  - (a) (2 балла) Сколько пут опционов вам нужно продать, чтобы с помощью этой стратегии обменять все ваши доллары? Один пут-опцион соответствует 1 EUR.
  - (b) (2 балла) Рассчитайте премию, которую вы получите за опционы.
8. (12 баллов) Банк купил 1 млн ATM колл-опционов в евро со сроком погашения один год с целью хеджирования против роста курса EUR/USD.
  - (a) (2 балла) Оцените величину позиции в USD при  $t = 0$ .
  - (b) (3 балла) Объясните, каким образом можно захеджировать эту позицию с использованием базового актива (создать дельта-нейтральную позицию)?
  - (c) (2 балла) Рассчитайте доход/потери по вашему дельта-нейтральному портфелю в случае, если на следующий день курс EUR/USD достигнет отметки 1,25.
  - (d) (5 баллов) Рассчитайте гамму по позиции колл. Создайте дельта-гамма-нейтральную позицию с использованием базового актива и европейского колл-опциона с  $K = 1,25$  при  $t = 0$ .

## ДИЗАЙН РЫНКОВ

### Аукцион с независимыми частными оценками (IPV)

1. Рассмотрим модель IPV с двумя покупателями, у которых распределения оценок равномерны и различны:  $V_1 \in [a_1, b_1]$ ,  $V_2 \in [a_2, b_2]$ . Ценность товара для продавца  $S = 0$ .

- (a) Опишите оптимальный механизм в явном виде. При каких условиях продавец будет игнорировать одного из покупателей?
- (b) Предложите меру неэффективности механизма, вычислите её как функцию от параметров модели.

### Аукцион с зависимыми оценками

1. На аукционе второй цены один товар продаётся двум потенциальным покупателям. Каждый покупатель  $i$  получает сигнал  $X_i$ . Ценность товара для покупателя  $i$  равна

$$V_i = X_i + a_i X_{-i}$$

где  $0 \leq a_i < 1$  – параметры (возможно,  $a_1 \neq a_2$ ).

Вычислите “конкурентное” равновесие в аукционе второй цены, совпадающее с равновесием в доминирующих стратегиях при  $a_1 = a_2 = 0$ , и с эффективным симметричным равновесием при  $a_1 = a_2$ . Является ли это равновесие эффективным?

### Дополнительные вопросы теории аукционов

1. (Глобальные или локальные торги)

В каждом из нескольких городов продавец продаёт один товар  $N \geq 1$  покупателям.

- (a) Рассмотрите простую базовую модель, позволяющую вычислить ожидаемый доход продавца и ожидаемые выигрыши покупателей [например, аукцион Викри (второй цены) без резервной цены, одинаково распределённые независимые оценки, ...]
- (b) Пусть есть два города, расстояние между которыми  $D \geq 0$ . Один (и только один) из продавцов может провести рекламную кампанию, затратив  $A$ , и в результате привлечь покупателей из другого города. Вычислите, какое влияние окажет эта возможность на доходы продавцов и выигрыши покупателей в каждом городе. При каких условиях на параметры продавцу будет выгодно так сделать?
- (c) Пусть по-прежнему есть два города. Предположим, что оба продавца проводят рекламную кампанию и устраивают совместный эффективный аукцион, а потом делят доходы. При каких условиях на параметры продавцы предпочтут глобальный аукцион двум локальным? Выиграют или проиграют покупатели от глобализации торгов?

- (d) Что и как (или почему) изменится в ваших результатах, если городов более двух? Ожидаете ли вы возникновения одного глобального рынка или нескольких аукционов среднего масштаба?

2. (Аукционы контекстной рекламы, VCG vs GSP). На аукционе продаются  $K$  рекламных позиций, которые пользователь может видеть на экране после некоторого действия (например, поискового запроса). Каждый рекламодатель  $i$  характеризуется двумя параметрами:  $V_i$  – ценность перехода пользователя по его рекламной ссылке и  $ctr_i$  – кликабельность, вероятность, что пользователь перейдет по рекламной ссылке, если она находится на первой позиции. Позиции различаются по степени заметности для пользователей, так что для рекламодателя  $i$  вероятность, что по его ссылке перейдут, если она показывается на позиции  $k$ , равна  $\alpha_k ctr_i$ , где  $\alpha_1 = 1$  и  $\alpha_k > \alpha_{k+1}$  для всех  $k < K$ .

- (a) Опишите механизм VCG для этой модели.
- (b) Найдите эффективное равновесие в механизме GSP, который распределяет позиции по правилам обобщенного аукциона второй цены с ранжированием заявок по произведению  $ctr_i$  на ставку за клик. Покажите, что платежи участников такие же, как и в случае механизма VCG.

## Матчинги

1. (Стабильность при использовании ТТС). Рассмотрим классическую задачу двустороннего матчинга. Предположим, что вместо использования алгоритма Гейла–Шепли для получения стабильного матчинга мы начинаем со случайного разбиения на пары и применяем к нему алгоритм ТТС. Как только мы находим цикл, например, начинающийся и заканчивающийся женщиной, мы разбиваем участников цикла на пары, начиная с этой женщины. Будет ли в результате получен стабильный матчинг? Докажите или предьявите пример, показывающий обратное.

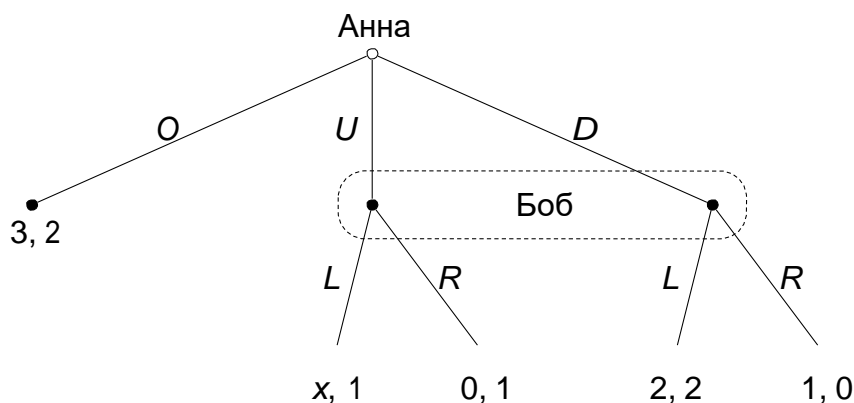
## Дополнительные главы теории игр

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

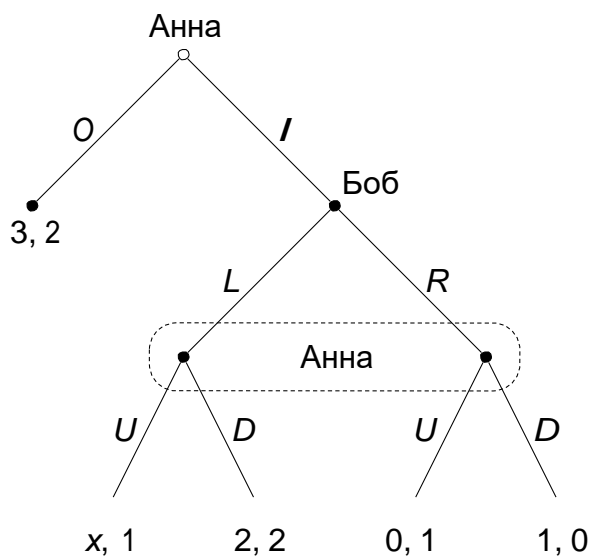
Общий вес: 100 баллов.

1. (55 баллов) Рассмотрим игру, в которой участвуют Анна и Боб, с параметром  $x \in \mathbb{R}$ . Она описывается деревом



- (a) (10 баллов) Для каких значений  $x$  исход (3, 2) может быть достигнут в секвенциальном равновесии (sequential equilibrium)?
- (b) (5 баллов) Дайте определение совершенного равновесия для игр в стратегической и расширенной формах.
- (c) (10 баллов) Для каких значений  $x$  игра имеет секвенциальное не являющееся совершенным равновесие?
- (d) (15 баллов) Насколько эта игра отличается от той, что нарисована ниже? Объясните (примерно 100-150 слов).
- (e) (15 баллов) Предположим, что  $x = \frac{5}{2}$ . Возможно ли построить структуру типов, основанную на лексикографической вероятностной системе, в которой игроки играют (O, L), и присутствуют рациональность и общее предположение рациональности (понятие рациональности включает требование, что лексикографическая вероятностная система игроков обладает полным суппортом)?

Постройте структуру типов и докажите, что требование выполняется или что такой структуры типов не существует. (Чтобы получить 30 баллов вместо 15, решите задачу построения такой структуры типов, в которой у Анны как минимум два типа).



2. (25 баллов) Анна хочет купить недвижимость и для этого назначает встречу с риэлтором Бобом. Боб знает нынешнее состояние рынка, который может быть прочным рынком покупателя, рынком покупателя, рынком продавца или прочным рынком продавца. Анна знает, каков её интерес к недвижимости (сильный или слабый). Кроме этого, если её интерес сильный, она знает, является ли рынок недвижимости прочным рынком продавца на данный момент или нет. Если её интерес слабый, она знает, является ли этот рынок рынком продавца или рынком покупателя.

Мы хотим смоделировать ситуацию в структуре, основанной на разбиении. Мы предполагаем, что множество состояний  $\Omega$ , которое отражает неопределенность, известно обоим агентам.

- Формально опишите множество состояний  $\Omega$ .
- Формально опишите знания агентов.
- Для каждой  $\omega \in \Omega$  опишите все такие события  $E$ , что в  $\omega$  Боб знает, что Анна знает  $E$ .

3. (20 баллов) Рассмотрим кооперативную игру с перераспределяемой между 3 игроками  $A$ ,  $B$  и  $C$  полезностью. Выигрыши в этой игре задаются следующим образом:

$$v(A, B) = 0.2, v(B, C) = 0.6, v(A, B, C) = 0.8.$$

(Все остальные коалиции дают нулевые выигрыши).

Найдите один стабильный набор фона Неймана-Моргенштерна в этой игре или покажите, что его не существует (приведите полные доказательства).



## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1

Общий вес: 100 баллов.

1. (20 баллов) Три игрока  $i = 1, 2, 3$  независимо решают, предложить единицу общественного блага ( $s_i = 1$ ) или нет ( $s_i = 0$ ). Если совокупный объем общественного блага равен  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ , то игрок  $i$  получает полезность  $u_i(s_1, s_2, s_3) = v_k - cs_i$ , где  $c$  – это издержки на предложение общественного блага.  
Предположим, что  $v_0 = 0$ ,  $v_1 = \frac{5}{4}$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = \frac{5}{2}$ ,  $c = 1$ . Существует ли в этой игре коррелированное равновесие (*correlated equilibrium*), дающее совокупную полезность  $u_1 + u_2 + u_3$  выше, чем в любом равновесии Нэша в чистых стратегиях?
2. (20 баллов) Рассмотрим стандартную игру Пиво и Киш (*Beer and Quiche*). Является ли равновесие <киш для обоих типов первого игрока, драться, если пиво, не драться, если киш, для второго игрока> совершенным равновесием? Аргументируйте свой ответ.
3. (15 баллов) Рассмотрим следующую игру:

		Боб			
		A	B	C	D
Анна	a	5, 1	7, 6	2, 5	6, 8
	b	4, 4	1, 2	8, 3	5, 3
	c	6, 3	4, 3	4, 4	7, 2
	d	7, 6	6, 7	5, 8	3, 6

- (a) (10 баллов) Найдите итеративно недоминируемое множество стратегий (*iteratively undominated set of strategies*).
  - (b) (2.5 баллов) Является ли стратегия A лучшим ответом на какие-либо верования?
  - (c) (2.5 баллов) Является ли стратегия c лучшим ответом на какие-либо верования?
4. (45 баллов) Рассмотрим модель Спенса об образовательных сигналах, в которой есть три типа работников со способностями  $\theta = 1, 2, 4$ . Продуктивность работника равна его способностям  $\theta$ , а его издержки на получение образования  $e$  равны  $c(e, \theta)_{e^2} = \frac{100}{e^2}$ . Фирма максимизирует ожидаемую прибыль – разность между продуктивностью работника и его заработной платой, а работник максимизирует свой ожидаемый выигрыш – заработную плату за вычетом издержек на образование.

- (a) (15 баллов) Рассмотрим следующую стратегию: работник плохого типа выбирает  $e_l = 0$ , работник среднего типа выбирает  $e_m = \frac{1}{8}$ , работник хорошего типа выбирает  $e_h = \frac{3\sqrt{17}}{40}$ , а фирма платит  $w = 1$  при  $e < e_m$ ,  $w = 2$  при  $e_m \leq e < e_h$  и  $w = 4$  при  $e \geq e_h$ . Дайте краткую аргументацию, почему это равновесие. Удовлетворяет ли оно интуитивному критерию Чо и Крепса (*intuitive criterion by Cho and Kreps*)?
- (b) (15 баллов) Удовлетворяет ли это равновесие уточняющему критерию D1 (*D1 refinement*)?
- (c) (15 баллов) Найдите одно равновесие, удовлетворяющее уточняющему критерию D1. (Покажите, что оно является равновесием: вам не нужно рассматривать все возможные случаи, просто сформулируйте идею и объясните, почему ваше равновесие удовлетворяет критерию.)

## Домашнее задание 2

Общий вес: 95 баллов.

1. (30 баллов) Рассмотрим следующую игру:

		Боб		
		L	C	R
Анна	U	4, 5	4, 1	4, 2
	M	5, 2	1, 4	8, 3
	D	4, 5	3, 4	5, 7

- (a) Сконструируйте структуру типов  $(S^a, S^b; T^a, T^b; \lambda^a, \lambda^b)$ , где  $\lambda^i : T^i \rightarrow \Delta(S^{-i} \times T^{-i})$ , в которой существуют такие типы  $t^a \in T^a$  и  $t^b \in T^b$ , что оба игрока рациональны в  $(M, t^a, R, t^b)$ .
- (b) Принадлежит ли профиль стратегий  $(M, R)$  множеству итеративно недоминируемых стратегий (*iteratively undominated strategies*)?
- (c) Выполняются ли рациональность и общая вера рациональности (*common belief of rationality*) в  $(M, t^a, R, t^b)$  в вашей структуре типов?
- (d) Возможно ли в принципе сконструировать такую структуру типов  $(S^a, S^b; T^a, T^b; \lambda^a, \lambda^b)$ , что рациональность и общая вера рациональности выполняются в  $(M, t^a, R, t^b)$  для каких-то типов  $t^a \in T^a$  и  $t^b \in T^b$ ? (В ответе вы можете сослаться на теоремы из статей.)
2. (40 баллов) Рассмотрим игру между Анной и Бобом, представленную на Рисунке 1.

- (a) (3 балла) Запишите эту игру в нормальной форме.
- (b) (37 баллов) Не ссылаясь на какие-либо теоремы о допустимости (*admissibility*) в играх, ответьте на следующий вопрос: возможно ли сконструировать пространство типов, основанное на лексикографических вероятностных системах, в которых существует профиль стратегий-типов, у которого составляющая стратегий – это  $((I, D), L)$ , и в котором выполняются рациональность и общее предположение рациональности? Под рациональностью в данном случае понимается оптимальность действий игроков при заданных верованиях, а их верования имеют вид лексикографических вероятностных систем с полным суппортом (*full-support lexicographic probability systems*). Если да, предложите пример и детально аргументируйте, почему он удовлетворяет условию. Если нет, докажите, что придумать такой пример невозможно.

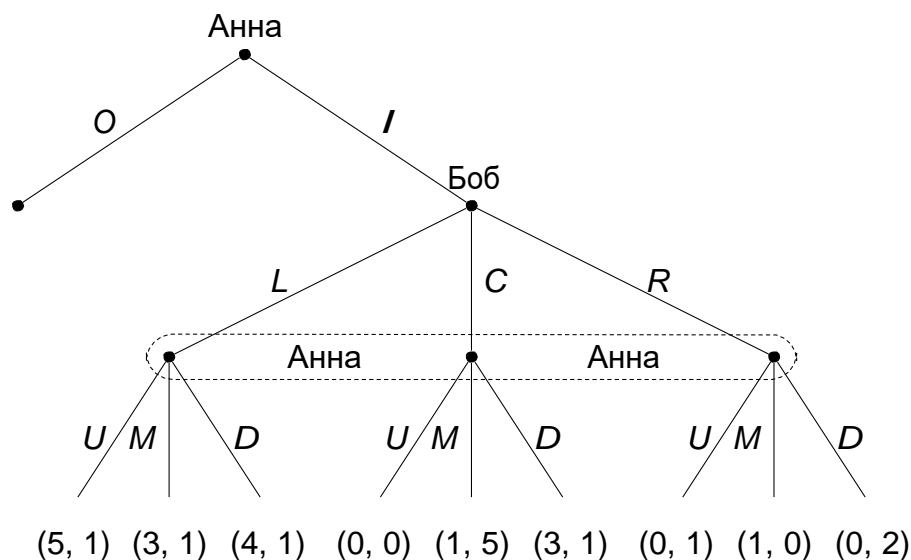


Рисунок 1: Игра для Задачи 2

3. (25 баллов) Рассмотрим структуру как в статье [Aumann and Brandenburger \[1995\]](#)<sup>1</sup>.

- (a) (5 баллов) Найдите все смешанные равновесия Нэша в игре, представленной в таблице (1).
- (b) (20 баллов) Пусть  $(\sigma^a, \sigma^b)$  – одно из равновесий Нэша. Сконструируйте структуру типов, в которой верования игроков таковы, что индуцируемые ими предположения относительно действий оппонентов совпадают с  $\sigma^b$  и  $\sigma^a$  для Анны и Боба соответственно и что игроки верят, что их оппоненты рациональны и имеют догадки  $\sigma^a$  и  $\sigma^b$ . Приведите формальную аргументацию, почему ваша конструкция удовлетворяет требованиям.

<sup>1</sup>Robert Aumann and Adam Brandenburger. Epistemic conditions for nash equilibrium. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1161–1180, 1995

### Домашнее задание 3

1. Рассмотрим следующие свойства оператора знаний  $K(\cdot)$ :

$$(K0) K(\Omega) = \Omega,$$

$$(K1) K(E \cap F) = K(E) \cap K(F) \text{ для всех } E, F \subseteq \Omega,$$

$$(K2) K(E) \subseteq E \text{ для всех } E \subseteq \Omega,$$

$$(K3) K(E) \subseteq K(K(E)) \text{ для всех } E \subseteq \Omega,$$

$$(K4) \sim K(\sim K(E)) \subseteq K(E) \text{ для всех } E \subseteq \Omega, \text{ где } \sim \text{ обозначает дополнение множества в } \Omega.$$

(a) Докажите (K4) для определения  $K$ , основанного на разбиении.

(b) Верно ли, что оператор <все знают>  $K_{\forall}$  удовлетворяет свойствам (K1)–(K3)? Приведите доказательство или контрпример.

(c) Верно ли, что оператор общего знания  $K_{\forall}^{\infty}$  удовлетворяет свойствам (K1)–(K3)? Приведите короткую аргументацию или контрпример.

(d) Удовлетворяет ли  $K_{\forall}$  свойству (K4)? Приведите доказательство или контрпример.

(e) Удовлетворяет ли  $K_{\forall}^{\infty}$  свойству (K4)? Приведите доказательство или контрпример.

2. Альберт и Бернард только что подружились с Черил и хотят узнать, когда у нее день рождения. Черил дала им список из 10 дат:

Май 15, 16, 19

Июнь 17, 18

Июль 14, 16

Август 14, 15, 17

Затем Черил рассказала Альберту и Бернарду отдельно месяц и день своего рождения соответственно.

Диалог между этими людьми происходит следующим образом.

*Альберт:* Я не знаю, когда у Черил день рождения, но я знаю, что Бернард тоже не знает этого.

*Бернард:* Сначала я не знал, когда у Черил день рождения, но теперь я знаю.

*Альберт:* Тогда я тоже знаю, когда у Черил день рождения.

(a) Используя концепцию знаний, основанную на разбиении, формализуйте диалог и выводы, которые делают игроки.

(b) Перечислите все общие трюизмы для вашей формализации.

3. Рассмотрим структуру из Blume and Easley [2006]<sup>1</sup>.

Предположим, что  $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ , неопределенность распределена одинаково и независимо, и истинные вероятности состояний мира равны  $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ . В экономике есть четыре агента с функциями полезности  $u_i(x) = \frac{x^{1-\gamma_i}}{1-\gamma_i}$  коэффициентами дисконтирования  $\beta_i$  и субъективными верованиями  $p_i$  на  $S$  для  $i = 1, \dots, 4$ , заданными в следующей таблице:

	$\gamma_i$	$\beta_i$	$p_i$
1	0	0.8	$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$
2	1	0.8	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$
3	2	0.9	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$
4	2	0.8	$\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

Определите, кто выживет. Приведите вычисления.

## 4. Рассмотрим следующую симметричную игру с двумя игроками:

	X	Y	Z
X	1, 1	-1, 2	0, 0
Y	2, -1	-1, -1	0, 0
Z	0, 0	0, 0	0, 0

- (a) Найдите все симметричные равновесия Нэша (чистые и смешанные) в этой игре.
- (b) Запишите систему дифференциальных уравнений для реплицирующей динамики (*replicator dynamics*) этой игры.
- (c) Рассмотрим траекторию, определенную в пункте (b), начинающуюся с какой-то внутренней точки симплекса смешанных стратегий. Сходится ли она при  $t \rightarrow \infty$ ? (*Подсказка*: рассмотрите эволюцию  $x + y$  и  $y/x$ , где  $x$  и  $y$  – это веса соответствующих чистых стратегий). Сравните результаты с ответом на пункт (a). Интуитивно объясните, почему остальные стратегии выбывают.
- (d) Является ли устойчивое состояние, полученное в пункте (c), устойчивым по Ляпунову (Lyapunov stable)? Как вы можете интуитивно обосновать свой ответ?

<sup>1</sup>Lawrence Blume and David Easley. If you're so smart, why aren't you rich? belief selection in complete and incomplete markets. *Econometrica*, 74(4):929–966, 2006

## Домашнее задание 4

Общий вес: 70 баллов.

1. (35 баллов) Четыре человека  $A, B, C, D$  живут вдоль дороги в том же порядке, что они перечислены. Причём между  $A$  и  $B$  0,8 км, между  $B$  и  $C$  0,4 км, между  $C$  и  $D$  0,8 км. Они обсуждают построение нескольких общественных объектов. Каждый объект должен быть расположен рядом с чьим-то домом. Издержки на строительство каждого объекта равны 1. Полезность каждого человека равна  $u_i = 1 - c_i - d_i$ , где  $c_i$  – это часть издержек на строительство, которую платит этот человек, а  $d_i$  – это расстояние от его дома до ближайшего объекта. Как минимум один объект должен быть построен (полезность, которую он приносит, гораздо выше всех издержек).

- (а) Формализуйте эту ситуацию как коалиционную игру с передаваемой полезностью при условии, что каждая коалиция принимает Парето-эффективное для себя решение.
- (б) Где должны быть построены объекты? Сколько должен заплатить за них каждый человек, если используется концепция решения через ядро (*core solution concept*)? Ваш ответ может зависеть от распределения в ядре.
- (с) Сколько должен заплатить каждый из игроков в соответствии с правилом Шепли (*Shapley rule*)? Сравните с (б).

2. (15 баллов) Докажите часть <только если> теоремы Бондарёвой–Шепли (*Bondareva-Shapley theorem*): не пустота ядра подразумевает, что для любой сбалансированной коллекции  $D$  коалиций со сбалансированными весами  $(\delta_S)_{S \in D}$  выполняется

$$v(\{1, \dots, N\}) \geq \sum_{S \in D} \delta_S v(S).$$

3. (20 баллов) Рассмотрим игру <мажоритарное голосование> (*majority voting game*) с 5 участниками. Найдите одно устойчивое множество фона Неймана-Моргенштерна.

## Корпоративные финансы

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

Вы можете принести любые написанные или распечатанные материалы. Пользоваться интернетом и мобильной связью на экзамене не разрешено. Калькулятор для расчетов не потребуется.

У вас 3 часа на выполнение экзамена. Максимальное количество баллов – 100. В экзамене 5 вопросов и один бонусный за 20 баллов.

1. В [Jensen and Meckling \[1976\]](#)<sup>1</sup> подразумевается выпуск акций без права голоса. Обсудите влияния производства акций дающих право голоса в контексте их анализа и последствий для агентской стоимости собственного капитала. Станет ли она больше или меньше?
2. [Banerjee et al. \[2016\]](#)<sup>2</sup> ограничивают возможные типы контрактов и предполагают, что фирма может выпускать только акции разных классов. Это допущение исключает задолженность в целях обеспечения оптимальной безопасности. Может ли рискованный долговой договор быть оптимальным в этих условиях?
3. [Leland \[1994\]](#)<sup>3</sup> разрабатывает подход условных претензий к компромиссной теории структуры капитала. Прокомментируйте влияние увеличения параметра затрат на банкротство  $\alpha$  на результаты модели. Кроме того, увеличится или уменьшится оптимальное плечо или купон? Опишите механизм.
4. Гипотеза [Modigliani and Miller \[1958\]](#)<sup>4</sup> о независимости является основополагающим элементом современных корпоративных финансов. Является ли структура капитала независимой при дефолте? Прокомментируйте.
5. [Strebulaev and Yang \[2013\]](#)<sup>5</sup> показывают, что относительно большое количество фирм не несет почти никакой задолженности. Почему этот результат

<sup>1</sup>Michael C Jensen and William H Meckling. Theory of the firm: Managerial behavior, agency costs and ownership structure. *Journal of Financial Economics*, 3(4):305–360, 1976

<sup>2</sup>Suman Banerjee, Ronald W Masulis, and Sarmistha Pal. Regulation and firm value: Curious case of transparency and disclosure laws in russia. 2016

<sup>3</sup>Hayne E Leland. Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure. *The Journal of Finance*, 49(4):1213–1252, 1994

<sup>4</sup>Franco Modigliani and Merton H Miller. The cost of capital, corporation finance and the theory of investment. *The American Economic Review*, 48(3):261–297, 1958

<sup>5</sup>Ilya A Strebulaev and Baozhong Yang. The mystery of zero-leverage firms. *Journal of Financial Economics*, 109(1):1–23, 2013



---

необычен? Прокомментируйте данный вопрос в контексте основных результатов.

6. Краудфандинг – это метод финансирования проекта через большую базу инвесторов, которая обычно поддерживается онлайн-платформами или социальными сетями. Хотя он и приобрел популярность, он принципиально отличается от венчурного финансирования. В контексте [Kaplan and Strömberg \[2003\]](#)<sup>6</sup>, каковы преимущества венчурного капитала?

---

<sup>6</sup>Steven N Kaplan and Per Strömberg. Financial contracting theory meets the real world: An empirical analysis of venture capital contracts. *The Review of Economic Studies*, 70(2):281–315, 2003

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1

Общий вес: 100 баллов.

#### 1. (40 баллов) Пенсия

Вам 25 лет, и у вас есть работа, на которой вы зарабатываете \$10 000 в год (все цифры в реальном выражении). Ожидаемый рост зарплаты 1%, вы выйдете на пенсию в 65 лет. Каждый год вы выделяете 30% своего заработка на свой сберегательный счет, который растет на 5% в год. Когда вам исполнится 30 лет, вы планируете купить дом стоимостью \$40 000, который будет финансироваться за счет 20-летнего кредита с равными годовыми платежами по ставке 2%, выплачиваемой с вашего сберегательного счета (без первоначального взноса). Когда вам исполнится 45, вам нужно заплатить за колледж для двоих детей, по \$5 000 каждому в течение 4 лет.

- (a) Как велики ежегодные выплаты за дом?
- (b) Посчитайте общую сумму накоплений с 25 до 65 лет (Используйте Excel).
- (c) При прочих равных, какой минимальный процент сбережений вы можете сохранять, не сокращая потребление с 25 до 65 лет (иными словами, чтобы накопительный счет был всегда положительным)? Используйте Excel.

Теперь предположим, что после выхода на пенсию вы планируете жить также и умереть в возрасте 85 лет, не оставив никакого наследства (кроме дома).

- (d) Каков максимальный объем потребления в год, который вы можете себе позволить? (Не забывайте про 5% годовой рост сберегательного счета). Используйте Excel.

#### 2. (24 балла) Карманная ЧПС (NPV)

Вы являетесь предпринимателем, обладающим запатентованной технологией, которая позволяет инвестировать \$12 000 сегодня в (немасштабируемый) проект, который будет приносить \$5 000 за первый год, \$6 000 долларов за второй, \$8 000 долларов за третий и ничего с тех пор. Это безрисковая инвестиция и, следовательно, требует, чтобы ставка дисконтирования была равна безрисковой ставке 5%. Вы также можете одолжить или отдать деньги банку под 5%.

- (a) Какова ЧПС данного проекта?
- (b) Укажите финансовую стратегию, которой вы будете следовать, если захотите идеально сгладить свое потребление (т.е. потреблять одну ту же сумму за каждый период). Насколько большим может быть этот денежный поток?

## 3. (36 баллов) Тест

Кратко прокомментируйте ваши ответы (без объяснений).

- (a) Для корпоративных облигаций, в среднем чем выше кредитоспособность эмитента, тем выше процентная ставка. (*Правда/Ложь.*)
- (b) Как и публичные компании, частные компании также могут использовать свою цену акций в качестве показателя эффективности. (*Правда/Ложь.*)
- (c) Когда корпорация терпит неудачу, инвестор, защищенный ограниченной ответственностью, может потерять максимум:
  - A. сумму первоначальных инвестиций;
  - B. размер прибыли от инвестиций;
  - C. сумму, необходимую для оплаты долгов корпорации;
  - D. сумму личного богатства инвестора.
- (d) Решение <Российские железные дороги> (РЖД) потратить 600 миллионов долларов на покупку еще 8 поездов Sapsan от Siemens – это решение бюджетирования капитала. (*Правда/Ложь.*)
- (e) Облигации с нулевым купоном выпускаются по ценам ниже номинальной стоимости, а для инвесторов, которые держат облигацию до погашения, доход исходит из разницы между покупной ценой и выплатой номинальной стоимости в момент погашения. (*Правда/Ложь.*)
- (f) Что из нижеследующего НЕ является преимуществом индивидуального предпринимательства?
  - A. Единое налогообложение.
  - B. Простота организации.
  - C. Ограниченная ответственность.
  - D. Отсутствие разделения между владением и контролем.
- (g) У британского правительства есть бессрочная облигация <consol>, выплачивающая \$100 каждый год. Предполагая, что текущая процентная ставка в Великобритании составляет 5% и что вы получите свой первый процентный платеж сразу после покупки облигации <consol>, тогда стоимость облигации <consol> ближе всего к:
  - A. \$2 000
  - B. \$2 100
  - C. \$1 000
  - D. \$1 100
- (h) Ставка дисконтирования, которая делает текущую стоимость платежей по облигациям равной ее цене, называется:
  - A. норма прибыли;
  - B. доходность к погашению;
  - C. текущая доходность;
  - D. ставка купона.

- (i) Какой из следующих факторов будет меняться при изменении процентной ставки?
- A. Ожидаемые денежные потоки от облигации.
  - B. Текущая стоимость платежей по облигациям.
  - C. Купонный платеж облигации.
  - D. Срок погашения облигации.
- (j) Согласно модели дисконтирования дивидендов, какую цену нужно заплатить за акции с 13% необходимой нормой прибыли, 4% ставкой дивидендов и ежегодным дивидендом в размере \$2.50, который будет выплачен завтра?
- A. \$27.78
  - B. \$30.28
  - C. \$31.10
  - D. \$31.39
- (k) Норма прибыли от инвестиций вне корпорации устанавливала минимальный доход для инвестиционных проектов внутри корпорации. *Правда/Ложь*
- (l) ВНД – это доходность денежных потоков от инвестиций, также известная как альтернативная стоимость капитала. *Правда/Ложь*
- (m) Среди взаимоисключающих проектов всегда следует выбирать проект с более высоким ВНД. *Правда/Ложь*
- (n) Фирмы, принимающие инвестиционные решения на основе правила окупаемости, могут быть предвзятыми в отказе для:
- A. краткосрочных проектов;
  - B. проектов долгожителей;
  - C. с ранним притоком денежных потоков;
  - D. имеют отрицательный чистую приведенную стоимость.
- (o) Для осуществления проекта требуется первоначальный отток денежных средств в размере \$80,000. Ожидается, что в результате инвестиций чистый приток денежных средств составит \$15,000 каждый год в течение восьми лет. Внутренняя норма прибыли от этой инвестиции с точностью до десятой доли процента составляет:
- A. 50.0%
  - B. 18.8%
  - C. 6.7%
  - D. 10.0%
- (p) Денежные потоки проекта дисконтируются с соответствующей стоимостью капитала в размере 10%. Чистая приведенная стоимость проекта равна 0. Это означает, что
- A. ожидаемый возврат от проекта составляет 0%;

- 
- V. выполнение проекта приведет к снижению стоимости фирмы;
- C. ожидаемый возврат от проекта составляет 10%;
- D. выполнение проекта приведет к повышению стоимости фирмы.
- (q) Какое из следующих утверждений обязательно верно?
- A. Если внутренняя норма прибыли проекта больше 0, у проекта также будет положительная ЧПС.
- B. Если внутренняя норма доходности проекта меньше требуемой нормы прибыли, проект всегда должен быть отклонен.
- C. Если внутренняя норма доходности проекта равна требуемой норме прибыли, у проекта будет положительная ЧПС.
- D. Если два проекта являются взаимоисключающими, следует выбрать вариант с более высокой внутренней нормой прибыли, если его внутренняя норма прибыли выше стоимости капитала для фирмы.
- (r) Финансовый консультант предлагает инвестиции, которые всегда будут приносить вам \$500 в месяц. Это будет стоить вам \$25,000 сегодня. Какая эффективная годовая ставка (ЭГС) будет у этих инвестиций? Округлите ответ до 10й доли процента.
- A. 24.0%
- B. 26.8%
- C. 21.2%
- D. 20.0%

## Домашнее задание 2

Общий вес: 120 баллов.

### 1. (30 баллов) Реальный опцион

Предположим, что вы являетесь следующим Илоном Маском и рассматриваете проект, который вы называете <Space Invaders>, который будет предоставлять услуги космических шаттлов и поможет в колонизации Марса<sup>1</sup>.

Если проект окажется успешным, он будет генерировать \$180, иначе он будет генерировать \$60 с равной вероятностью. Далее предположим, что соответствующая рискованная ставка дисконтирования этих денежных потоков составляет 20%, а безрисковая ставка составляет 5%. У вас уже есть космические ракеты, стоимость которых составляет \$200 (ракеты были приобретены для предыдущих проектов), которые вы можете использовать для ваших запусков. Вы также помните из курса корпоративных финансов, что это невозвратные издержки, и они не должны быть входить в ваш анализ.

Для реализации проекта вы можете использовать старый автобус, припаркованный спереди, а также клейкую ленту, степлеры и иные канцтовары для крепления ракет, которые поставляются бесплатно. Это были подарки, подаренные вам вашей бывшей девушкой на пятую годовщину, они не имеют никакой ценности (эмоциональной или материальной), что следует из термина <бывшая>.

(a) (5 баллов) Какова ЧПС данного проекта?

Теперь предположим, что ваш лучший друг, Никола Тесла, настолько впечатлен идеей, что решает поддержать ваш проект, обеспечив его гарантией (в случае провала он купит его за \$180).

(b) (5 баллов) Какова стоимость проекта сейчас?

(c) (10 баллов) В (b) вы замечаете, что стоимость проекта выше, чем в (a). Теперь вы пытаетесь выяснить, откуда взялась эта дополнительная стоимость. Что вы думаете по данному поводу?

(d) (5 баллов) К какому реальному опциону относится стоимость гарантии? Пожалуйста объясните. Какова стоимость данного опциона?

(e) (5 баллов) Используйте риск-нейтральные значения вероятностей для оценки данного опциона. Какова стоимость использования данного метода?

### 2. (15 баллов) Уникальность vs. рыночные риски

Рассмотрим 3 акции. В течение некоторого периода времени их беты и стандартные отклонения прибыли были следующими:

<sup>1</sup>Кстати, это реальный проект, который в настоящее время рассматривается Илоном Маском и его компанией SpaceX <https://www.wired.com/2016/09/elon-musk-colonize-mars/>

	$B$	$\sigma$
Vladivostok Far Away Fish	2.46	34.6%
NES Ninjas	0.84	28.6%
Chelyabinsk Ladies Club	1.45	20.3%

Безрисковая процентная ставка 4%. Рыночная премия 8%. Стандартное отклонение рыночного портфеля 20%.

- Какой портфель является самым безопасным для инвестора с хорошо диверсифицированным портфелем?
- Какой портфель является самым безопасным для недиверсифицированного инвестора (может вложиться только в одну из акций)?
- Представим портфель с равными инвестициями в каждую акцию. Какой будет <бета> данного портфеля?
- Представим хорошо диверсифицированный портфель, собранный так, что его <бета> такая же, как у Vladivostok Far Away Fish. Какими будут бета и стандартное отклонение прибыли данного портфеля?
- Какова ожидаемая норма прибыли для каждой акции (используйте модель CAPM)?

3. (13 баллов) *Стоимость капитала*

Если безрисковая ставка составляет 5%, необходимая норма прибыли компании по ее долгу составляет 6%, бета-коэффициент равен 1.4, премия за риск долевого участия – 5.5%, ставка корпоративного налога – 34%, доля объема долга по отношению к основному капиталу равна 0.5, какова ожидаемая норма прибыли от активов фирмы, прогнозируемая моделью оценки финансовых активов (CAPM)?

4. (17 баллов) *Длинный ответ*

Рост долгов увеличивает риск задолженности. Это также увеличивает фондовый риск. Следовательно, это увеличивает риск фирмы. Прокомментируйте справедливость вышеуказанных утверждений в мире MM.

5. (40 баллов) *Тест*

Кратко прокомментируйте выбранные ответы. Вы не получите баллы в случае неверного комментария или его отсутствия. Неполное пояснение заслуживает неполных баллов.

- Инвесторы требуют компенсации за несущественный риск (*Правда/Ложь*).
- Соответствующая альтернативная стоимость капитала – это доход, от которого инвесторы отказываются при выборе инвестиции:
  - с тем же риском;
  - с безрисковой доходностью;
  - с ожидаемым доходом равным доходу S&P 500 индекса;
  - с обычной общей премией за риск на фондовом рынке.

- (c) Объединяя активы в портфель, возможно оставить какой-либо индивидуальный риск (*Правда/Ложь*).
- (d) Что подразумевается под утверждением, что инвесторы могут <отменить> последствия корпоративной реструктуризации?
- A. Инвесторы погашают свою долю долга фирмы.
  - B. Инвесторы покупают ценные бумаги только в фирмах, не использующих заемные средства.
  - C. Инвесторы будут больше платить за акции обеспеченные собственным капиталом фирмы.
  - D. Инвесторы могут использовать их название и дублировать эффекты реструктуризации.
- (e) Инвестор ожидал 13% доход от своего портфеля с бета-коэффициентом 1.25 до того, как премия за рыночный риск снизилась с 8% до 6%. Какой доход ожидается от портфеля в новых условиях?
- A. 10.5%
  - B. 15.5%
  - C. 17.5%
  - D. 21.0%
- (f) Какое из следующих утверждений про чистую приведенную стоимость (ЧПС) неверно?
- A. ЧПС представляет ценность проекта с точки зрения наличных средств сегодня.
  - B. Хорошие проекты будут иметь положительную ЧПС.
  - C. ЧПС проекта представляет собой разницу между текущей стоимостью его выгод и затрат.
  - D. Когда вы сталкиваетесь с набором альтернатив, следует выбрать вариант с самым низким ЧПС, чтобы свести к минимуму стоимость затрат.
- (g) Если банкротство возможно, т. е. акционеры могут столкнуться с долговым дефолтом, общая стоимость фирмы (как сумма рыночной стоимости собственного капитала и долга) будет строго меньше стоимости фирмы, не использующей заемные средства. *Правда/Ложь*
- (h) В каком случае уместно включать невозвратные издержки в стоимость проекта?
- A. Когда издержки относительно велики.
  - B. Если это улучшит ЧПС проекта.
  - C. Если они считаются накладными расходами.
  - D. Невозвратные издержки никогда не учитываются в стоимости проекта.
- (i) В мире Модильяни-Миллера без налогов и финансовых проблем, значение WACC является постоянным, хотя стоимость капитала строго возрастает, а стоимость долга не уменьшается. *Правда/Ложь*



- (j) Инвестор, не склонный к риску, не будет делать рискованные ставки. *Правда/Ложь*
- (k) Ковариация описывает общую тенденцию к росту или падению. *Правда/Ложь*
- (l) Ковариация измеряет тенденцию переменной показывать необычные значения в конкретном направлении. *Правда/Ложь*
- (m) Ковариация – это линейная мера, она не может обнаружить нелинейную связь между переменными. *Правда/Ложь*
- (n) Отрицательная корреляция необходима для возникновения <эффекта портфеля>. *Правда/Ложь*
- (o) Совершенная корреляция между доходами свидетельствует об арбитраже. *Правда/Ложь*
- (p) Рекапитализация на основе кредита – это стратегия, при которой компания берет на себя значительную дополнительную задолженность с целью выплаты крупных дивидендов или выкупа акций. *Правда/Ложь*
- (q) В контексте анализа ЧПС положительная экономическая прибыль создает стоимость для акционеров. *Правда/Ложь*
- (r) Пропуск заполните наиболее верным вариантом: Если компания Gamma International Inc. имеет соотношение долга к собственному капиталу 80%, она может отказаться от проекта с \_\_, поскольку большая часть увеличения стоимости компании может быть начислена кредиторам, а не акционерам.
- A. отрицательным ЧПС;
  - B. нулевым ЧПС;
  - C. положительным ЧПС;
  - D. отрицательной нормой прибыли;
  - E. нулевой нормой прибыли.
- (s) Слишком большая задолженность в структуре капитала может вызвать конфликт интересов между акционером и кредиторами. Какое из утверждений верно?
- A. Акционеры могут принять проект с отрицательной ЧПС, поскольку большая часть льгот начисляется кредиторам.
  - B. Акционеры могут принять проект с отрицательной ЧПС из-за своей ограниченной ответственности.
  - C. Акционеры могут отклонить проект с положительной ЧПС, поскольку они несут расходы на банкротство из этого проекта.
  - D. Слишком много безрисковой задолженности приводит к замене активов.
  - E. Все вышесказанное верно.
- (t) Какое из утверждений про систематический портфельный риск верно?

- A. Это сумма взвешенных отклонений каждого актива в портфеле.
- B. Систематический риск неважен при составлении бюджета капиталовложений, поскольку он не учитывает расчет учетной ставки.
- C. Это сумма взвешенных ковариаций между активами в портфеле.
- D. Если корреляция международных активов высока, нам не надо платить, чтобы добавить эти активы в портфель.
- E. Все вышеперечисленное.

## Математические финансы

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

*Проект. Оценка ноты с гарантией возврата*

Общий вес работы: 10 баллов.

#### Описание

1. Нота на  $N=1000$  рублей.
  2. 1 год до срока погашения
  3. Базовый актив: SP500
    - (a)  $S_0 = 2880$
    - (b) Волатильность = 16%
  4. В срок погашения платит  $N(1 + by^+)$  рублей, где  $y = \frac{S_t - S_0}{S_0}$
  5. Дивидендная доходность SP500 2%
  6. Ставки процента  $r_{RUB} = 7\%$  и  $r_{USD} = 2\%$
  7. Используйте исторические данные за последний год для расчета волатильности обменного курса и мгновенной корреляции.
1. (4 балла) Найти справедливую ставку участия  $b$  для ноты без барьера
    - (a) Используя МС
    - (b) Используя аналитическое решение
  2. (3 балла) Найти справедливую ставку участия  $b$  для ноты с барьером на выход  $V=\$3500$ . В этом случае выигрыш составляет  $N$ , если барьер достигается снизу в течение одного года.
  3. (3 балла) Объясните, как хеджировать эту ноту (из предыдущей точки) при  $t=0$  и найти соответствующие дельты с помощью МС. Бонусный 1 балл будет начислен за эффективный способ расчета дельт.  
Требуемая точность для МС составляет 0,01% для коэффициента участия и дельт.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1

Общий вес работы: 35 баллов.

1. (5 баллов) Пусть  $X(t)$  –  $(\mu, \sigma)$  броуновское движение. По определению  $dX = \mu dt + \sigma dB$ . Определим процесс геометрического броуновского движения как  $Y(t) = e^{X(t)}$ . Используя лемму Ито, найдите стохастический процесс для  $Y(t)$ .

2. (2 балла) Из Халла 28.3.

Рассмотрим две ценные бумаги, каждая из которых зависит от одной и той же рыночной переменной. Ожидаемые доходности ценных бумаг составляют 8% и 12%. Волатильность первой ценной бумаги составляет 15%. Мгновенная безрисковая ставка составляет 4%. Какова волатильность второй ценной бумаги?

3. (8 баллов) Из Халла 28.10.

Переменная  $S$  является инвестиционным активом, обеспечивающим доход по ставке  $q$ , измеренной в валюте  $A$ . В реальном мире переменная следует процессу  $dS = Sdt + Sdz$ . При необходимости определяя новые переменные, найдите процесс, которому следует  $S$ , и соответствующую рыночную цену риска,  $v$ :

- (a) Традиционном риск-нейтральном мире для валюты  $A$ .
- (b) Традиционном риск-нейтральном мире для валюты  $B$ .
- (c) Форвардном риск-нейтральном мире по отношению к облигации с нулевым купоном, номинированной в валюте  $A$  со сроком погашения в момент времени  $T$ .
- (d) Форвардном риск-нейтральном мире по отношению к облигации с нулевым купоном, номинированной в валюте  $B$  со сроком погашения в момент времени  $T$ .

4. (10 баллов) Две валюты:  $D$  и  $F$  ( $D$  – местная валюта, а  $F$  – иностранная).  $X$  – это обменный курс, определенный как количество  $D$  на единицу  $F$  ( $F$  – актив, а  $D$  – деньги).

Тогда  $dx = (r_d - r_f)X dt + \sigma_X X dB_1$  в риск-нейтральном мире, где денежная единица – это счет денежного рынка в валюте  $D$ .

Пусть  $S$  – цена акций в валюте  $F$ . Акция не платит дивиденды.

Тогда  $dS = r_f S dt + \sigma_S S dB_2$  в риск-нейтральном мире, где денежная единица – это счет денежного рынка в валюте  $F$ .

Пусть  $\tilde{S} = SX$  - цена акций в валюте  $D$ . С другой стороны, мы знаем, что в риск-нейтральном мире, где денежной единицей является счет денежного рынка в валюте  $D$ ,  $\tilde{S}$  (как цена торгуемого актива) должна следовать стохастическому процессу с переходом, равному  $r_d \tilde{S} dt$ .

Пожалуйста, выведите процесс, которому следует в риск-нейтральном мире, номинированном в валюте  $D$ , чтобы это продемонстрировать.

5. (10 баллов) Пусть  $X$  - обменный курс USD/RUB,  $Y$  - обменный курс EUR/RUB и  $Z$  - обменный курс EUR/USD. Обменные курсы должны удовлетворять условию  $Z = Y/X$ . В рублевом риск-нейтральном мире  $X$  и  $Y$  следуют процессам:

$$dX = (r_{RUB} - R_{USD})X dT + \sigma_X X dB_1$$

$$dY = (r_{RUB} - R_{EUR})Y dT + \sigma_Y Y dB_2$$

Выведите процесс для  $Z$  в риск-нейтральном мире, номинированном в долларах США.

## Домашнее задание 2. Метод Монте-Карло

### 1. (15 баллов) Убыточный колл-опцион

Рассмотрим колл-опцион на фьючерсы на нефть.

Текущая дата: 03/10/2018

Срок истечения действия опциона: 25/10/2018

Страйк: 90

Текущая цена фьючерса на нефть: 86.2

Волатильность: 26%

Процентная ставка по доллару США составляет 1%.

(a) Оцените опцион методом Монте-Карло. Требуемая точность составляет 0,01% (это означает, что  $SD/Цена < 0,01\%$ , где  $SD$  - стандартное отклонение оценки методом Монте-Карло).

- i. Реализуйте метод Монте-Карло без понижения дисперсии (VR).
- ii. Реализуйте метод Монте-Карло с AV.
- iii. Реализуйте метод Монте-Карло со стратификацией и используйте его только в денежных экспериментах.
- iv. Реализуйте метод Монте-Карло, основываясь на числах Соболя.

Сколько результатов наблюдений вам нужно сгенерировать, чтобы достичь требуемой точности во всех случаях?

(b) Чтобы проверить получившуюся цену, вычисленную по методу Монте-Карло, рассчитайте цену опциона с помощью аналитической формулы BS.

### 2. (15 баллов) Азиатский опцион

Вычислите цену Азиатского колл-опциона на основе предыдущих данных, используя два метода.

(a) Метод Монте-Карло. Опять же, требуемая точность составляет 0,01%.

- i. Реализуйте метод Монте-Карло без понижения дисперсии (VR).
- ii. Реализуйте метод Монте-Карло с AV.
- iii. Реализуйте метод Монте-Карло, основываясь на числах Соболя.

(b) Сравните получившуюся цену, вычисленную по методу Монте-Карло с приближительным аналитическим решением из лекции.

---

## Машинное обучение

---

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

Экзамен должен быть загружен архивом с подробным (не коротким) отчетом и кодом. Загрузите свою работу в соответствующий раздел на my.NES.

На my.NES вы найдете файл с данными activity.zip, в котором содержатся данные о мониторинге физической активности.

Y	Активность (1 = лежать, 2 = сидеть, 3 = стоять, 4 = ходить, 5 = бегать)
X0	Частота сердцебиения
X1-X7	Данные из блока мониторинга, находящегося на запястье руки
X8-X14	Данные из блока мониторинга, находящегося на груди
X15-X21	Данные из блока мониторинга, находящегося на лодыжке

Переменные в наборе данных: Данные из блока мониторинга: температура (в градусах Цельсия), данные 3D-ускорения (оси X, Y, Z, m/s<sup>2</sup>), данные 3D-гироскопа (оси X, Y, Z, rad/s).

Задача состоит в том, чтобы определить тип активности на основе данных мониторинга.

1. Загрузите файл с данными в память компьютера. Случайным образом выберите 60% всех наблюдений для учебной выборки, остальные будут вашей тестовой выборкой (убедитесь, что обе выборки содержат примерно одинаковые пропорции всех видов деятельности). С этого момента предположим, что обучение модели означает ее обучение на учебной выборки, а тестирование – построение прогноза на тестовой выборке.
2. Нормализуйте переменные X0-X21 так, чтобы их значения принадлежали отрезку [0,1].
3. Постройте полиномиальную логит-модель, вычислите прогнозируемые вероятности для данных тестовой выборки и сформируйте предсказания на ос-

нове максимальной прогнозируемой вероятности. Найдите вероятности ошибок классификации. Какая переменная является самой важной для умения отличать стоячее состояние от лежащего?

4. Постройте классификатор методом ближайших соседей, создайте классификацию для тестовой выборки и вычислите вероятности ошибок классификации. Сделайте это для нескольких значений  $K$ , а затем выберите лучшее из них, используя  $k$ -кратную кросс валидацию (по всем данным, а не только по учебной выборке). Какая переменная является самой важной для умения отличать стоячее состояние от лежащего?
5. Используйте все факторы и создайте простую нейронную сеть с одним скрытым слоем (попробуйте несколько значений для количества скрытых узлов, чтобы минимизировать ошибку прогнозирования), которая могла бы различать все пять активностей. Найдите вероятности ошибок классификации.
6. Выберите другой метод классификации самостоятельно и выполните это же упражнение с выбранным методом.
7. Какой из четырех методов прогнозирования вы бы предпочли? Почему?



## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1

На *my.NES* вы найдете файл *wifi.txt*, который содержит данные по 2000 измерениям уровня сигнала Wi-Fi в семи точках доступа, расположенных в четырех комнатах. Измерения были собраны с использованием смартфонов.

Переменные в наборе данных следующие:

AP1	Уровень сигнала из точки доступа 1 (в dB)
AP2	Уровень сигнала из точки доступа 2 (в dB)
AP3	Уровень сигнала из точки доступа 3 (в dB)
AP4	Уровень сигнала из точки доступа 4 (в dB)
AP5	Уровень сигнала из точки доступа 5 (в dB)
AP6	Уровень сигнала из точки доступа 6 (в dB)
AP7	Уровень сигнала из точки доступа 7 (в dB)
Room	Комната, в которой были сделаны измерения

Задача состоит в том, чтобы локализовать смартфон в одной из четырех комнат.

Воспользуйтесь этим набором данных для выполнения предложенного упражнения. В работе должен быть отчет, а также исходный код с комментариями, с помощью которого получены результаты. Используйте любой язык программирования, который вы предпочитаете, в котором можно загрузить данные, выполнить все необходимые вычисления и построить все необходимые таблицы/графики. Отчет должен быть в формате PDF (он может также содержать отсканированные заметки, сделанные от руки). Загрузите вашу работу на *my.NES* в виде архива с отчетом и кодом.

1. Загрузите файл с данными в память компьютера. Случайным образом выберите 1500 наблюдений для учебной выборки, остальные будут вашей тестовой выборкой (убедитесь, что обе выборки содержат примерно одинаковые пропорции данных по всем четырем комнатам). С этого момента предположим, что обучение модели означает ее обучение на учебной выборке, а тестирование – построение прогноза на тестовой выборке.
2. Нормализуйте переменные AP1–AP7 так, чтобы их значения принадлежали отрезку  $[0,1]$ .

3. Обучите полиномиальную логит-модель, вычислите прогнозируемые вероятности для данных тестовой выборки и сформируйте предсказания на основе максимальной прогнозируемой вероятности. Найдите вероятности ошибок классификации.
4. Используйте линейный дискриминантный анализ для классификации наблюдений в тестовой выборке. Найдите вероятности ошибок классификации.
5. Используйте квадратичный дискриминантный анализ для классификации наблюдений в тестовой выборке. Найдите вероятности ошибок классификации. Сравните полученные результаты с результатами предыдущего пункта.
6. Постройте классификатор методом ближайших соседей, создайте классификацию для тестовой выборки и вычислите вероятности ошибок классификации. Сделайте это для нескольких значений  $K$ , а затем выберите лучшее из них, используя перекрестную проверку с исключением (по всем данным, а не только по учебной выборке). Какой из четырех методов прогнозирования вы бы предпочли? Почему?
7. С целью проиллюстрировать полученные результаты вычислите первые две основные компоненты для всех объясняющих переменных, пересчитайте все предыдущие классификаторы только на основе этих двух переменных и постройте график с границами четырех предсказанных групп для каждого классификатора. В этом упражнении используйте те же  $K$  и ширину окна, что и раньше, не переделывайте часть с кросс-валидацией.

Советы для тех, кто будет выполнять задание с помощью Python:

#### Разделение выборки:

`sklearn.model_selection.train_test_split()` может в этом помочь ([http://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.model\\_selection.train\\_test\\_split.html](http://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.model_selection.train_test_split.html)).

#### Полиномиальная логит-модель:

`sklearn.linear_model.LogisticRegression()` может помочь с обучением различных логит-регрессий. В частности, нужно указать `multi_class='multinomial'`. Здесь можно найти пример с графиками:

[http://scikit-learn.org/stable/auto\\_examples/linear\\_model/plot\\_logistic\\_multinomial.html](http://scikit-learn.org/stable/auto_examples/linear_model/plot_logistic_multinomial.html)

#### Дискриминантный анализ:

`sklearn.discriminant_analysis.LinearDiscriminantAnalysis()`,  
`sklearn.discriminant_analysis.QuadraticDiscriminantAnalysis()`.

Взгляните на пример:

[http://scikit-learn.org/stable/auto\\_examples/classification/plot\\_lda\\_qda.html](http://scikit-learn.org/stable/auto_examples/classification/plot_lda_qda.html)

**Метод К-ближайших соседей:**

`sklearn.neighbors.KNeighborsClassifier()` производит классификацию. Начните <http://scikit-learn.org/stable/modules/neighbors.html>, чтобы посмотреть, как это делается.

**Кросс-валидация:**

Вы можете использовать `sklearn.model_selection.cross_val_score()` чтобы посчитать кросс-валидацию. Материалы:

[http://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.model\\_selection.cross\\_val\\_score.html](http://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.model_selection.cross_val_score.html).

Взгляните на `cv argument`, а также на итератор `sklearn.model_selection.LeaveOneOut`.

Примеры:

[http://scikit-learn.org/stable/auto\\_examples/model\\_selection/plot\\_underfitting\\_overfitting.html](http://scikit-learn.org/stable/auto_examples/model_selection/plot_underfitting_overfitting.html),

[http://scikit-learn.org/stable/auto\\_examples/model\\_selection/plot\\_nested\\_cross\\_validation\\_iris.html](http://scikit-learn.org/stable/auto_examples/model_selection/plot_nested_cross_validation_iris.html)

Пример того, как вы можете построить график прогнозируемых областей:

[http://scikit-learn.org/stable/auto\\_examples/classification/plot\\_classifier\\_comparison.html](http://scikit-learn.org/stable/auto_examples/classification/plot_classifier_comparison.html)

## Домашнее задание 2

На `my.NES` вы найдете файл `ccdefaults.txt`, который содержит данные по 30000 пользователям кредитных карт из Тайваня, включающие личную информацию и счета/платежи по кредитным картам за 6 месяцев 2005 года. Переменные в наборе данных следующие:

<code>LIMIT_BAL</code>	Сумма кредита (в долларах США): включает как индивидуальный потребительский кредит, так и его/членов семьи (дополнительный кредит)
<code>SEX</code>	Пол 1 = мужчина, 2 = женщина)
<code>EDUCATION</code>	Образование 1 = магистратура/аспирантура, 2 = университет, 3 = средняя школа, 4 = другое)
<code>MARRIAGE</code>	Семейное положение: 1 = женат/замужем, 2 = не женат/не замужем, 3 = другое)
<code>AGE</code>	Возраст (в годах)
<code>PAY_0–PAY_6</code>	История прошлых платежей (с апреля по сентябрь 2005 года): PAY_0 = статус погашения в сентябре 2005 года; PAY_1 = статус погашения в августе 2005 года; ...; PAY_6 = статус погашения в апреле 2005 года. Шкала измерения статуса погашения: -2, -1 = ранее погашение; 0 = погашение производится вовремя; 1 = задержка погашения на один месяц; 2 = задержка погашения на два месяца; ...; 8 = задержка погашения на восемь месяцев; 9 = задержка погашения на девять месяцев и больше
<code>BILL_AMT1–BILL_AMT6</code>	Сумма выписки по счету в долларах США). BILL_AMT1 = сумма выписки по счету в сентябре 2005 года; BILL_AMT2 = сумма выписки по счету в августе 2005 года; ...; BILL_AMT6 = сумма выписки по счету в апреле 2005 года
<code>PAY_AMT1–PAY_AMT6</code>	Сумма предыдущего платежа (в долларах США). PAY_AMT1 = сумма, выплаченная в сентябре 2005 года; PAY_AMT2 = сумма, выплаченная в августе 2005 года; ...;
<code>DEFAULT</code>	Неисполненный платеж в следующем месяце (Да = 1, Нет = 0)

Основная цель этого упражнения – предсказать переменную `DEFAULT`, используя классификацию на основе метода построения деревьев.

Воспользуйтесь этим набором данных для выполнения предложенного упражнения. В работе должен быть отчет, а также исходный код с комментариями, с помощью которого получены результаты. Используйте любой язык программирования, в который можно загрузить данные, выполнить все необходимые вычисления и построить все необходимые таблицы/графики. Отчет должен быть в формате PDF (он может также содержать отсканированные заметки, сделанные от руки). Загрузите вашу работу на my.NES в виде архива с отчетом и кодом.

1. Загрузите файл с данными в память компьютера. Случайным образом выберите 20000 наблюдений для учебной выборки, а остальные – для тестовой выборки, но убедитесь, что обе выборки содержат примерно одинаковые пропорции данных по неисполненным платежам. С этого момента предположим, что обучение модели означает ее обучение на учебной выборке, а тестирование - построение прогноза на тестовой выборке.
2. Используйте первые пять факторов (*PAY\_0*, *BILL\_AMT1*, *PAY\_AMT1*) и постройте дерево, которое будет разделять владельцев кредитных карт на надежные и рискованные группы, на коротких исторических данных. Найдите вероятности ошибок I и II типа, используя тестовую выборку как для полного дерева, так и для дерева с отсеченными ветвями. Какое дерево работает лучше? Подсказка: если вы используете Python для того, чтобы построить классификатор, взгляните на <http://scikit-learn.org/stable/modules/tree.html> для того, чтобы понять, как использовать *sklearn.tree.DecisionTreeClassifier()*, чтобы построить дерево.
3. Повторите предыдущий пункт, используя расширенные исторические данные (*PAY\_1*, *BILL\_AMT2*, *PAY\_AMT2*). Увеличивает ли это точность предсказания?
4. Выберите 1000 псевдослучайных чисел из учебной выборки и постройте дерево классификации из предыдущего пункта для всех псевдослучайных чисел. Используйте метод размножения выборок (*bagging*) для агрегирования результатов классификации. Вычислите вероятности ошибок I и II типа, сравните с предыдущими результатами. Подсказка: для метода размножения выборок вы можете использовать *sklearn.ensemble.BaggingClassifier()*.

## Машинное обучение: глубокий уровень

---

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

Общий вес работы: 100 баллов.

1. (5 баллов) Какая макроэкономическая модель регулирования экономики не уделяла должного внимания стоимостному анализу?
  - (a) Классическая
  - (b) Кейнсианская
  - (c) Монетаристская
  - (d) Институциональная
  
2. (5 баллов) Какой метод исследования стоимости использует дискретные модели?
  - (a) Оценка
  - (b) Мониторинг
  - (c) Управление
  
3. (5 баллов) Что является источником внутренней информации о компании в современных системах мониторинга и управления ее стоимостью?
  - (a) Финансовая отчетность
  - (b) Прогнозы аналитиков
  - (c) Сообщения в СМИ
  - (d) ERP-система компании
  
4. (5 баллов) Укажите лишний этап построения статистической модели:
  - (a) Сбор и верификация исходных данных
  - (b) Выбор факторов
  - (c) Построение модели
  - (d) Получение оценок
  - (e) Согласование полученных результатов с заинтересованными лицами
  - (f) Проверка статистической значимости модели

- 
5. (5 баллов) Какая проблема актуальна при сборе на зарубежных рынках данных, выраженных нарастающим итогом?
- (a) Проблема дополнительных эмиссий и консолидаций акций
  - (b) Проблема разных ставок налогообложения
  - (c) Проблема разных курсов валют
  - (d) Проблема разных дат окончания финансового года
  - (e) Проблема величины продаваемых пакетов
6. (10 баллов) Какой метод верификации исходных данных не применяется для верификации данных о стоимости активов:
- (a) семантические анализаторы
  - (b) матрицы граничных значений
  - (c) конверторы отраслевых классификаторов
  - (d) наборы решающих правил
  - (e) проверка данных с использованием колл-центра
  - (f) тестовые и валидационные выборки
7. (5 баллов) Какие требования к факторам предъявляют классические статистические модели:
- (a) значимость
  - (b) независимость
  - (c) внятная экономическая интерпретация
  - (d) все вышеперечисленное
  - (e) ничего из вышеперечисленного
8. (5 баллов) Какая проблема решается путем логарифмического шкалирования исходных данных?
- (a) мультиколлинеарности
  - (b) робастности
  - (c) гетерескедастичности
  - (d) гомоскедастичности
9. (5 баллов) Какого значения  $R^2$  желательно добиваться в моделях оценки стоимости?
- (a)  $>0,4$
  - (b)  $>0,5$
  - (c)  $>0,7$

- (d)  $>0,8$
10. (10 баллов) Что не относится к недостаткам классических моделей дисконтирования:
- (a) Сомнительные расчеты будущих дивидендов, чистой прибыли и денежных потоков
  - (b) Ограничения по значению ставки ( $r > g$  в моделях постоянного роста)
  - (c) Высокая чувствительность к изменению ставки дисконтирования
  - (d) Вычислительная сложность моделей
  - (e) Невозможность оценивать убыточные компании
11. (5 баллов) Согласно теореме Миллера-Модильяни стоимость компании:
- (a) зависит от финансового левериджа
  - (b) не зависит от финансового левериджа
  - (c) зависит структуры капитала
12. (5 баллов) Что играет роль терминальной стоимости в модели EVO?
- (a) Сверх-доходы
  - (b) Сумма коэффициентов омега и гамма
  - (c) Чистые активы текущего периода
  - (d) Прогнозируемая прибыль будущего периода
13. (10 баллов) Укажите неверное высказывание о моделях остаточного дохода:  
\*
- (a) Являются частным случаем и расширением моделей дисконтированного денежного потока
  - (b) Всегда используют авторегрессионные модели для прогнозирования денежных потоков
  - (c) Позволяют разбить стоимость компании на стабильный компонент и критерий эффективности. Оценивают эффективность управления компанией
14. (5 баллов) По итогам финансового года компания получила ROE меньше, чем среднеотраслевой показатель. Будет ли ее стоимость с точки зрения моделей остаточного дохода:
- (a) Выше рыночной стоимости чистых активов
  - (b) Ниже рыночной стоимости чистых активов
  - (c) Равна чистым активам
  - (d) Эти показатели не взаимосвязаны



- 
15. (5 баллов) Для оценки чего не применяют теорию ценообразования реальных опционов
- (a) Земельных участков под застройку
  - (b) Стартапов
  - (c) Проблемных предприятий
  - (d) Высокодоходных акций известных компаний
  - (e) Месторождений полезных ископаемых
16. (5 баллов) Что не относится к современным исследованиям в области цифровой экономики:
- (a) Экономические эксперименты
  - (b) Вероятностное прогнозирование
  - (c) Поведенческая экономика
17. (5 баллов) Как не используют выборки из генеральной совокупности аналитики больших данных:
- (a) Как метод формирования комплексного суждения о генеральной совокупности случайной величины
  - (b) Как метод тестирования полученных моделей
  - (c) Как метод верификации исходных данных

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1

Требуется по данным финансовой отчетности за 2016 год определить, обанкротилась ли компания или нет в 2017 году.

#### *Цель*

Необходимо определить, обанкротилась ли компания или нет в 2017 году. Для каждого ID\_FIRM в тестовой выборке необходимо получить значение для переменной BANKR: 0 (не банкрот) или 1 (банкрот).

#### *Метрика*

В качестве метрики используется взвешенная точность. Поскольку доля банкротств в выборке значительно меньше доли не обанкротившихся компаний, то обычная точность, вычисляемая как отношение общего числа верных предсказаний к общему числу компаний, здесь не подходит. В данном случае более уместна взвешенная точность, которая учитывает доли классов.

#### *Формат файла с решением*

Файл с решением в формате csv должен содержать в точности два столбца. В первой строке должны быть указаны названия столбцов: ID\_FIRM и BANKR. В последующих 323600 строках указываются идентификаторы компаний и рассчитанные значения, отвечающие за банкротство.

Таким образом, файл с решением имеет следующий формат:

```
ID_FIRM,BANKR
```

```
755065,0
```

```
755066,0
```

```
755067,1
```

```
755068,0
```

```
и т.д.
```

## Домашнее задание 2

Основой для задачи выступил набор данных, содержащий информацию об истории закупочной деятельности для больниц с 2012 года (приблизительно 16 млн наблюдений). Для каждой больницы было получено распределение по дням числа открытых лотов на поставку продукции, а затем вычислены основные характеристики этого распределения. Требуется по характеристикам распределения истории закупочной деятельности определить наличие подозрительной активности.

### *Цель*

Необходимо выявить наличие подозрительной активности в закупочной деятельности. Для каждого `id` в тестовой выборке необходимо получить значение для переменной `y`: 0 (подозрительной активности не выявлено) или 1 (есть признаки подозрительной активности).

### *Метрика*

В качестве метрики используется AUC (area under curve) - площадь под ROC-кривой. Формат файла с решением. Файл с решением в формате csv должен содержать в точности два столбца. В первой строке должны быть указаны названия столбцов: `id` и `y`. В последующих 2546 строках указываются идентификаторы больниц и флаг наличия признаков подозрительной деятельности.

Таким образом, файл с решением имеет следующий формат:

```
id,y
5093,0
5094,0
5095,1
5096,0
и т.д.
```

### Домашнее задание 3

Требуется по представленным объясняющим переменным получить оценку стоимости жилой недвижимости в Москве.

#### *Цель*

Необходимо получить оценку стоимости жилой недвижимости в Москве. Для каждого Id в тестовой выборке необходимо получить значение для переменной Price.

#### *Метрика*

В качестве метрики используется среднеквадратичная ошибка между логарифмом предсказанной оценки и логарифмом действительной оценки. Использование логарифмов позволяет сбалансировать ошибки при определении стоимости дешевого и дорогого жилья.

#### *Формат файла с решением*

Файл с решением в формате csv должен содержать в точности два столбца. В первой строке должны быть указаны названия столбцов: Id и Price. В последующих 10127 строках указываются идентификаторы квартир и рассчитанные оценки стоимости. Таким образом, файл с решением имеет следующий формат:

```
Id,Price
40509,12368167
40510,3865640
40511,10820914
40512,8961175
и т.д.
```

## Международная торговая политика

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

1. Россия облагает налогами экспорт ряда сырьевых товаров, в том числе нефти и газа. Покажите, какое влияние имеют эти налоги на благосостояние экономики. Рассмотрите сырую нефть и введение экспортного налога по сравнению со случаем свободной торговли. Предположите, что Россия – малая открытая экономика и не оказывает влияние на мировую цену нефти.
  - (a) Покажите общее изменение благосостояния экономики в рамках частичного равновесия и изменение его компонент.
  - (b) Нарисуйте соответствующую диаграмму для иллюстрации эффекта в рамках общего равновесия и покажите изменение благосостояния.
  - (c) Предположите теперь, что Россия – большая экономика на рынке сырой нефти. Как изменятся результаты анализа в (a) и (b) в этом случае?
2. Государственная химическая компания (ГХК) страны Эдом является монополистом. Никакая другая компания не производит удобрения в стране. Экономисты ГХК оценили функцию спроса в стране в виде  $F = 3000 - 100p$ , где  $p$  – цена тонны удобрений. (При цене \$20 за тонну спрос фермеров составляет 1000 тонн). Помимо ГХК удобрения в страну поставляют импортеры, которые покупают аналогичное удобрение на мировом рынке по цене \$10 за тонну. В условиях свободной торговли ГХК продает 1000 тонн.

Правительство решило установить квоту на импорт удобрения в размере 1000 тонн. Изначально права на поставки в пределах квоты были размещены среди большого числа людей. Но со временем ГХК смогла перекупить все права на импорт.

  - (a) Как введение квоты повлияло на потребление удобрения в стране и его цену?
  - (b) Изменились ли потребление и цена на удобрения после того, как ГХК приобрел все права на ввоз удобрений в пределах квоты?
3. Рассмотрим модель малой открытой экономики с  $n$  отраслями, в которых спрос задан как  $D_i = a_D - b_D p_i$ , а предложение товаров  $Z_i = b_S p_i$ , где  $a_D$ ,  $b_D$ ,  $b_S$  – параметры, а  $p_i$  – цена. Часть производителей в отраслях  $i \in \Lambda$  организованы в лоббистские группы (ЛГ) и торгуются с правительством за установление импортных тарифов, предлагая ему функции платежей  $C_i(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Полезность каждой ЛГ линейно зависит от прибыли в своей отрасли и размера платежа правительству:

$$V_i(p) = \pi_i(p_i) - C_i(p).$$

Правительство получает предложения функций платежей от всех ЛГ и выбирает вектор цен  $p$  максимизирующий полезность:

$$W(p) = I + \sum_{i=1}^n \pi_i(p_i) + N[s(p) - r(p)],$$

где  $I$  – суммарные трудовые доходы,  $N$  – количество агентов в экономике,  $s(p)$  и  $r(p)$  – потребительский излишек и доход от тарифов на одного работника в экономике соответственно.

- (a) Какой вид должны иметь оптимальные функции платежей? Опишите равновесие Нэша на аукционе заявок от ЛГ.
- (b) Найдите оптимальные тарифы, выбираемые правительством – функцию от мировых цен и параметров спроса и предложения.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1

1. Отечественная и иностранная фирмы поставляют разновидность одного и того же товара на рынок третьей страны. Спрос потребителей на отечественную и иностранную разновидности  $D(p, p^*)$  и  $D(p^*, p)$  соответственно. Спрос на товар каждой фирмы убывает по собственной цене и растет по цене конкурента. Предельные издержки фирм постоянны и равны  $s$ . Фирмы одновременно назначают цены. Прибыль каждой фирмы вогнута по собственной цене, и функции реакции таковы, что равновесие устойчиво. До того, как фирмы устанавливают цены, правительство принимает решение об экспортной субсидии/тарифе с целью максимизации благосостояния страны, которая равна прибыли отечественной фирмы и налоговым поступлениям.
  - (a) Покажите, что если выполнено условие на производные  $D_1 D_2 < D D_{12}$ , то небольшой экспортный налог увеличивает благосостояние страны. Проинтерпретируйте указанное условие в терминах наклона функции спроса.
  - (b) Найдите изменение благосостояния страны при введении небольшого налога. При каких условиях оно растет?
  - (c) Предположим, что каждая фирма несет фиксированные издержки, которые в точности равны равновесной прибыли фирмы в случае отсутствия вмешательства государства (в этой ситуации в равновесии чистая прибыль фирм равна нулю). Какова оптимальная политика нашего государства в этом случае?
2. Напишите рецензию на одну из статей на выбор:
  - [Berden and Francois \[2015\]](#)<sup>1</sup>.
  - [Tokarick \[2006\]](#)<sup>2</sup>.
3. Четыре человека сидят за столом и спорят, почему российское правительство должно создавать особые условия, в том числе используя меры торговой политики, для развития высокотехнологичных отраслей.
 

Владимир: <Они нуждаются в защите, так как они обеспечат быстрый рост страны в будущем>

Дмитрий: <Нет, потому что они производят промежуточные товары для других отраслей...>

<sup>1</sup>Koen Berden and Joseph Francois. *Quantifying Non-Tariff Measures for TTIP. Paper No. 12 in the CEPS-CTR project 'TTIP in the Balance' and CEPS Special Report No. 116/July 2015*. 2015

<sup>2</sup>Mr Stephen Tokarick. *Does Import Protection Discourage Exports?* Number 6-20. International Monetary Fund, 2006

Елена, перебивает: <Вы неправы! Они создают технологии, от которых выигрывает вся экономика!>

Евгений: <Совершенно нет причин грубить! Очевидно, что защита необходима, потому что они конкурируют с иностранными производителями, которых защищают собственные правительства.>

Какие из четырех утверждений являются оправданными аргументами для протекционистской политики в отношении высокотехнологичных отраслей? Кратко оцените каждый из аргументов.



## Домашнее задание 2

Для выполнения данного задания необходимо ознакомиться с каким-либо из документов, формулирующих задачи, цели и инструменты российской торговой политики в настоящее время. В качестве такого документа может быть взят проект Национальной экспортной стратегии. Проект стратегии был разработан экспертами Всероссийской академии внешней торговли с участием Всероссийского научно-исследовательского конъюнктурного института по заказу Минэкономразвития России. Однако, в связи с поступившими многочисленными замечаниями, проект возвращен Министерством на доработку, и до сих пор новая версия стратегии не была представлена на экспертизу. Проект стратегии выложен на странице курса. Другой возможный документ – Внешнеэкономическая стратегия РФ до 2020 года, принятая в 2008 году. Также выложена на странице курса. В рамках этого задания необходимо сделать следующее:

1. критически проанализировать некоторые положения Стратегий (как цели, так и меры по их достижению) и оценить их экономическую обоснованность;
2. сформулировать альтернативные предложения для новой внешнеэкономической или экспортной стратегии. Анализировать, комментировать и разрабатывать новые предложения желательно в рамках изученных в курсе теорий и методов.

Минимальный объем данной работы – 2 страницы.

## Мировая экономика

---

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

#### Вопросы для дискуссии

1. Постоянно ли высокий государственный долг сдерживает экономический рост?
2. Великая Депрессия в США с неоклассической точки зрения;
3. Индустриализация и экономическое развитие России через призму неоклассической модели роста];
4. Эволюция современных моделей бизнес-цикла с учетом великой рецессии.

---

## Отдельные главы прикладной международной торговли и финансов

---

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

1. Обсудите сильные и слабые стороны статьи Брока Смита о голландской болезни.
2. Докажите ключевой результат Баласса-Самуэльсона, что уровень цен будет функцией соотношения между товарной и не торгуемой производительностью сектора.

## Оценка активов

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

Общий вес: 38 баллов.

1. (8 баллов) Рассмотрим трехпериодную биномиальную модель. Годовая процентная ставка с непрерывным начислением процентов  $r = 6\%$ . Текущая цена акции  $S_0 = 100$ , и годовая волатильность  $\sigma = 0.2$ . Более того, существует американский пут-опцион с датой исполнения  $T = 1$  и ценой исполнения  $K = 30$ .
  - (a) (3 балла) Посчитайте риск-нейтральные вероятности и цены акций в каждой вершине биномиального дерева с точностью до 2 знаков после запятой.
  - (b) (4 балла) Посчитайте ценность американского пут-опциона в каждой вершине дерева.
  - (c) (1 балл) Какова оптимальная политика реализации опциона? Обоснуйте свой ответ.
  
2. (5 баллов) Бизнесмен управляет фирмой стоимостью \$100,000. Существует риск пожара, который уменьшит её чистую стоимость в соответствии со следующими тремя состояниями  $k = 1, 2, 3$  с вероятностью  $p_k$ :

Состояние	$p_k$	Стоимость
1	0.01	1
2	0.04	50,000
3	0.95	100,000

Как можно видеть из таблицы, в состоянии 3 ничего разрушительного не происходит, и бизнес сохраняет свою стоимость \$100,000.

- (a) (3 балла) Какую максимальную сумму заплатит бизнесмен за страховку, если у него логарифмическая функция полезности относительно его конечного богатства? (Заметка: страховые выплаты составляют \$99,999, \$50,000 и \$0 в первом, втором и третьем случаях соответственно.)  
Теперь предположим, что кроме этого бизнеса, у бизнесмена есть безрисковая инвестиция со стоимостью \$100,000 в каждом из трех состояний (пожар на нее не влияет).
- (b) (2 балла) Пересчитайте страховую премию. Сравните с изначальной постановкой и объясните разницу.

3. (8 баллов) Рассмотрим финансовый рынок со следующей матрицей выплат  $X$  и вектором цен  $p$ :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (a) (1 балл) Существует ли возможность для арбитража на этом рынке?  
 (b) (1 балл) Соответствует ли матрица выплат полному рынку?  
 (c) (4 балла) Репрезентативный инвестор имеет начальный запас из одной единицы каждого из двух активов и функцию полезности  $U = \ln c_1 + \ln c_2 + \gamma \ln c_3$ , где  $c_k \geq 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Определите равновесие. Найдите такую  $\gamma$ , что в чистой экономике обмена (*pure exchange economy*) без потребления в первом периоде  $p$  – равновесный вектор цен. Каков оптимальный состав портфеля и равновесный уровень потребления в каждом из состояний мира?  
 (d) (2 балла) Приведите интуицию, стоящую за полученными результатами. Почему предположение о репрезентативности инвестора оправдано в данном случае?
4. (12 баллов) Вспомните, что касательный портфель (*tangency portfolio*) в задаче Марковица (Markowitz) с  $N$  рисковыми и одним безрисковым активом задается следующим образом:

$$\tilde{\pi}^* = \frac{V^{-1}(\mu - r\mathbf{1})}{A - rC}, \quad \text{где}$$

$$A = \mathbf{1}^T V^{-1} \mu = \mu^T V^{-1} \mathbf{1}$$

$$C = \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1}$$

- (a) (2 балла) Посчитайте дисперсию доходности этого портфеля.  
 (b) (2 балла) Найдите алгебраическое выражение для линии распределения капитала (или эффективной границы), где наклон равен коэффициенту Шарпа. (Подсказка: вы можете записать выражения для ожидаемого дохода и стандартного отклонения смешанного портфеля, состоящего из касательного портфеля и безрискового актива.)  
 (c) (3 балла) Постройте график эффективной границы рисковых активов в пространстве ожидаемой доходности–стандартного отклонения и добавьте линию распределения капитала. Отметьте касательный портфель. Добавьте кривые безразличия относительно более склонного к риску и относительно менее склонного к риску инвестора. В каких точках их инвестиции будет оптимальны?  
 Теперь рассмотрим частный пример финансового рынка с тремя рисковыми активами: А, В и С. Их ожидаемые доходности равны 10%, 15% и 20% соответственно, а дисперсии – 1, 1 и 2 соответственно. Корреляция между А и В и С и В равны нулю. Корреляция между А и С равна  $-\frac{1}{2}$ . Доходность безрискового актива равна 2%.

- (d) (3 балла) Посчитайте вес касательного портфеля, его ожидаемую доходность и стандартное отклонение.
- (e) (2 балла) Рассмотрим следующие 2 портфеля D и E: оба имеют ожидаемую доходность 6%, D имеет стандартное отклонение 60%, а E – 120%. Можно ли составить эти портфели из активов A, B и C и безрискового актива? Будут ли эти портфели лежать на эффективной границе?
5. (2 балла) Вы решаете на компьютере задачу оптимизации в пространстве доходности и дисперсии (*mean-variance optimization*) для набора из 1000 акций. У вас медленный компьютер, и подсчет весов в оптимальном портфеле для заданной ожидаемой доходности занимает 2 часа. Ваша задача состоит в том, чтобы нарисовать всю границу портфеля (*portfolio frontier*) из хотя бы 50 точек к концу рабочего дня. Как вы будете это делать? (Подсказка: опишите алгоритм в нескольких шагах).
6. (3 балла) Коротко объясните, в чем заключаются парадокс роста цен на акции (*equity premium puzzle*) и парадокс безрисковой ставки (*risk-free rate puzzle*).

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Мидтерм

Общий вес: 20 баллов.

1. (4 балла) Рассмотрим однопериодную биномиальную модель с процентной ставкой 0.05,  $S_0 = 10$ ,  $u = 1.2$  и  $d = 0.98$ . Предположим, что вы выписали опцион, который выплачивает квадратный корень абсолютного значения разности цены акции в момент погашения и \$10.00 – то есть, он выплачивает  $|S_1 - 10|$ . Как много акций вы должны купить, чтобы реплицировать этот выигрыш? Какова будет стоимость реплицирующего портфеля?
2. (5 баллов) Сегодня 24 апреля. Представьте, что вы ищете котировки фьючерсов на российский рубль с истечением в последний день июня 2015 и обнаруживаете, что они торгуются за 0.018230. Обменный курс доллара к рублю на данный момент равен 53.9728, что подразумевает цену доллара, равную 0.018528 за рубль.
  - (a) (2 балла) Какова соответствующая разница между процентными ставками в России и США (предполагая процентные ставки постоянными)?
  - (b) (3 балла) Какова будет ваша арбитражная стратегия, если предположить, что вы можете сделать краткосрочную инвестицию по ставке 1% в долларах США и 9.5% в рублях? Опишите, что вы сделаете сегодня, а что – в конце июня, и объясните, почему это арбитраж (какого типа, I или II).
3. (5 баллов) Дана матрица выплат с  $K$  состояниями мира и  $N$  активами. Детально опишите алгоритм, проверяющий, что эта матрица выплат описывает полный финансовый рынок. Для подмножества полных рынков детально опишите алгоритм, проверяющий, есть ли возможность для арбитража или нет.
4. (6 баллов)
  - (a) (3 балла) Сформулируйте первую и вторую фундаментальные теоремы финансов.
  - (b) (3 балла) Набросайте доказательства обеих теорем для случая биномиальной модели. Четко изложите предпосылки модели. (Подсказка : вы можете работать с риск-нейтральными вероятностями вместо цен активов Эрроу-Дебрё (Arrow-Debreu securities). Опишите взаимосвязь между этими ценами и формулами риск-нейтральных вероятностей.)

### Домашнее задание 1

1. Стоимость \$950 через полгода при непрерывном начислении процентов составляет \$1000. Чему равна процентная ставка?
2. Найдите такую частоту начислений процентов по сложной процентной ставке 20%, чтобы она была эквивалентна ежегодному начислению по сложной процентной ставке 21%.
3. Рассмотрим следующий пример выплаты долга. Необходимо выплатить \$1000 долга пятью равными ежегодными платежами при процентной ставке 15%. Вычислите сумму ежегодного платежа (вы должны получить \$298.32). Сделайте таблицу, в которой указаны доли процентного платежа и платежа по погашению тела долга в общем ежегодном платеже и оставшийся долг по истечении каждого года. Постройте графики этих двух долей по отношению ко времени.
4. Рассмотрим следующую формулу расчёта цены облигации:

$$B_0 = \frac{C}{\frac{y}{m}} \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^{mT}} \right] + \frac{F}{1 + \frac{y}{m}} \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{m}\right)^{mT}},$$

где  $y$  – это доходность к погашению, выраженная в виде годовой процентной ставки,  $m$  – количество купонных выплат в год,  $C$  – размер купона,  $F$  – номинальная стоимость и  $T$  – срок до погашения.

- (a) Покажите, что цена облигации с купонной ставкой (купон, выраженный в долях от номинальной стоимости), равной доходности к погашению за период  $\frac{y}{m}$ , равна её номинальной стоимости.
- (b) Докажите, что цена облигации как функция от ставки процента является убывающей и выпуклой (вам необходимо будет вычислить две первые производные). Постройте график функции для 10-летней облигации с купоном 6%, выплачиваемым раз в полгода, и номинальной стоимостью 100. Укажите точку  $y = 6\%$  и соответствующую ей цену облигации, которую вы знаете из пункта (a).



## Домашнее задание 2

1. Закон единой цены гласит, что портфель (линейная комбинация активов) должен иметь цену, равную такой же линейной комбинации цен активов:

$$p^\theta = P^T \theta$$

- (a) Покажите, что из отсутствия арбитража типа II следует выполнение закона единой цены.
- (b) Покажите, что закон единой цены тем не менее не приводит к отсутствию арбитража. Актив 1 платит дивиденд 0 в состоянии 1, дивиденд 2 в состоянии 2 и стоит 1.6. Постройте пример такого портфеля, что закон единой цены выполняется, но возможность арбитража существует.
2. Покажите, что если актив (или портфель) с положительной ценой, неотрицательной выплатой во всех состояниях мира и строго положительной выплатой в хотя бы одном состоянии (актив с ограниченной ответственностью, как акция), то из арбитража типа II следует арбитраж типа I.
3. Покажите, что если актив Эрроу-Дебрё (*Arrow-Debreu security*) имеет нулевую или отрицательную цену, то существует возможность арбитража.
4. Компания хочет пробурить некоторую местность в поисках нефти. Главный источник неопределенности в этом бизнесе исходит от будущих цен на нефть. Сегодня цена барреля составляет \$20. Если страны ОПЕК придут к соглашению по поводу квот на добычу, они смогут добиться увеличения цен к следующему году до \$25. В таком случае стоимость залежи нефти будет оцениваться в 100 миллионов долларов. Если страны не смогут договориться, то цены упадут до \$15 за баррель, и залежь будет оцениваться в 20 миллионов долларов.
- Также известно, что цена годовичной облигации с нулевым купоном – \$0.9090.
- (a) Получите цены активов Эрроу-Дебрё.
- (b) Посчитайте стоимость залежи при условии отсутствия арбитража. Объясните необходимость информации о вероятностях будущих состояний мира.
- (c) Представьте, что залежь оценивается на рынке в 75 миллионов долларов. Какая возникает арбитражная стратегия? Какую прибыль вы можете из неё извлечь?
5. Цены и выплаты активов A и B в трех возможных состояниях мира представлены в матрицах:

	Цена ( $t = 0$ )	Платёж ( $t = 1$ )		
		$S_1$	$S_2$	$S_3$
A	1.8	2	2	2
B	1.7	3	1	1

- (a) Является ли рынок полным?
- (b) Существует ли возможность арбитража на этом рынке?  
Теперь представьте, что мы вводим третий актив D с выплатой 7 в состоянии 1 и выплатой 3 в состояниях 2 и 3.
- (c) Что вы можете теперь сказать о полноте рынка? Можете ли вы посчитать цену актива D при условии отсутствия арбитража?
- (d) Что если выплата актива D в третьем состоянии мира равна 2? Посчитайте для этого случая вектор риск-нейтральных вероятностей, совместимый с выплатами и ценами активов A, B и D.
6. Предположим, что обменный курс доллара к йене сегодня равен 135.14, то есть одна йена стоит 0.74 цента. Предположим, что безрисковая трехмесячная процентная ставка в США составляет 4%, а в Японии – 5%. Какова справедливая будущая цена приобретения йены через три месяца? Представьте, что форвардный контракт торгуется за 0.725. Какова арбитражная стратегия для получения прибыли на валютном рынке?
7. Рассмотрим индексный фьючерс, где цена фьючерса  $f(t, T)$  выражена в индексных пунктах. В частности, если количество акций, включенных в индекс, очень велико, очень удобно предположить, что индекс – это актив с непрерывно выплачиваемыми дивидендами. Представьте, что стоимость индекса на фондовой бирже составляет 13500, цена фьючерса на 9 месяцев равна 14100 индексным пунктам, а процентная ставка равна 8%. Найдите дивидендную доходность.
8. (a) Создайте функцию, которая сначала проверяет, является ли рынок, описываемый определенной матрицей выплат с  $K$  состояниями мира и  $N$  активами, полным. Для тех матриц, для которых рынок полон, функция считает реплицирующие портфели для всех активов Эрроу-Дебрё. Она возвращает их в виде матрицы, в которой каждая строка равна реплицирующему портфелю для одного из активов Эрроу-Дебрё. Если ли рынок не полон, программа должна выдать сообщение об ошибке и предложить вам ввести новую матрицу выплат. Если общий случай с матрицей выплат размером  $K$  на  $N$  слишком сложен, вы можете сделать это для матрицы  $2 \times 2$ .
- (b) Используйте функцию из пункта (a), чтобы написать другую функцию, которая для матрицы выплат и соответствующего вектора цен проверяет, является ли рынок неполным, и возможен ли арбитраж. Если рынок

полон, и возможности для арбитража отсутствуют, она вычисляет цену актива с заданными платежами. В противном случае она выдает ошибку. *Подсказка*: алгоритм может найти цены активов Эрроу-Дебрё и проверить, являются ли они положительными. Если да, он считает цену произвольного актива с таким же числом состояний мира, как у матрицы выплат (В Mathematica вы бы использовали индекс  $a.x$ .)

### Домашнее задание 3

1. Приведите аргумент, основанный на условии отсутствия арбитража, что нижняя и верхняя границы цены европейского пут-опциона  $P_t^E$  таковы:

$$\max(0, K e^{-r(T-t)} - S_t) \leq P_t^E < K e^{-r(T-t)}.$$

2. Предположим, что торгуются европейский колл- и пут-опционы с одинаковыми характеристиками. Цена исполнения равна текущей цене базового актива. Покажите, что в этом случае цена колл-опциона выше цены пут-опциона.
3. Европейские колл- и пут-опционы на бирже имеют цену исполнения \$20 и истекают через три месяца. Оба продаются за \$3. Безрисковая процентная ставка составляет 10% в год, текущая цена акции равна \$19, и через месяц будет выплачен дивиденд в размере \$1. Продемонстрируйте арбитражную возможность, открывающуюся для трейдера.
4. Покажите, что из отсутствия арбитража в биномиальной модели следует, что  $d < 1 + r < u$ . (Логика доказательства: предположите, что неравенства нарушаются, тогда существует арбитражная возможность. Покажите это для обоих неравенств.)
5. Это упражнение покажет, что активы Эрроу-Дебрё (*Arrow-Debreu securities*) можно реплицировать при помощи опционов, несмотря на то что они не торгуются на реальных финансовых рынках. Предположим, что вы наблюдаете цены набора колл-опционов, каждый из которых выпущен на один и тот же индексный портфель, стоящий на данный момент  $S = 10$ . Опционы имеют одинаковые характеристики, но разные цены исполнения. Следующая таблица содержит их текущие цены:

K	7	8	9	10	11	12	13
$C(S, K)$	3.354	2.459	1.670	1.045	0.604	0.325	0.164

Предположим, что индексный портфель может принимать только целые значения. Постройте портфель с выплатой в \$1 при  $S_T = 10$  и нулевой выплатой при остальных ценах индексного портфеля. Нарисуйте диаграмму выплат этого портфеля (она называется спред <бабочка> (*butterfly spread*)). Найдите цену портфеля. Наконец, какова цена актива Эрроу-Дебрё, который платит \$1, если стоимость индексного портфеля равна 10, и не платит ничего в ином случае?

6. Проведите вычисления для европейского колл-опциона (см. примечания к лекции, Рисунок 1.8) и для американского пут-опциона (Рисунок 1.9) при условии, что годовая процентная ставка составляет 6%, и временной шаг равен 6 месяцам.

7. Повторите предыдущее упражнение, но теперь для американского колл-опциона при предположении, что через 6 месяцев будет выплачен дивиденд в размере \$3.20 независимо от того, пойдет ли цена акции вверх или вниз. *Примечание:* используйте подход реплицирующего портфеля.
8. Докажите, что в биномиальной модели с параметризацией  $u = e^{\sigma\Delta t}$ ,  $d = 1/u$ ,  $p = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right)$  ожидаемое значение и дисперсия логарифма доходности  $\ln \frac{S_t}{S_0}$  стремится к  $\mu t$  и  $\sigma^2 t$  соответственно при росте числа периодов  $N$  до бесконечности (или, что то же самое, при стремлении  $\Delta t = \frac{T}{N}$  к нулю).
9. Используйте Mathematica (или другие подходящие программы), чтобы посчитать цену европейского колл-опциона из задачи 6 при временном шаге в одну неделю ( $N = 52$ ). Убедитесь, что вы подобрали параметры модели таким образом, что волатильность доходности  $\sigma$  остается постоянной.
10. Используйте Mathematica (или другие подходящие программы), чтобы посчитать цену американского пут-опциона из задачи 6. Снова используйте  $N = 52$ .
11. В однопериодной биномиальной модели найдите начальную стоимость портфеля, реплицирующего колл-опцион, если при продаже базового актива возникают пропорциональные транзакционные издержки. (При покупке акций не возникает никаких транзакционных издержек.) Сравните это значение со случаем, когда эти издержки отсутствуют. Предполагайте, что  $S_0 = K = \$100$ ,  $u = 1.1$ ,  $d = 0.9$ ,  $r = 0.05$ , принимая транзакционные издержки равными  $c = 2\%$  (продавец получает 98% цены акции).
12. Пусть  $S_0 = 75$  долларов,  $u = 1.2$  и  $d = 0.9$ . Предположим, что вы можете занять деньги по ставке 12%, но ставка по депозитам равна 8%. Найдите стоимости реплицирующих портфелей для пут- и колл-опционов. Равны ли цены пут- и колл-опционов по-прежнему ожидаемой стоимости будущих выплат, дисконтированных по безрисковой ставке, при риск-нейтральных вероятностях?
13. В этом упражнении мы используем двухпериодную биномиальную модель для процентной ставки, чтобы посчитать цены облигации и колл-опциона на эту облигацию. Предположим, что процентная ставка в начальный момент времени  $t = 0$  равна 5%. Пусть процентная ставка меняется в биномиальном дереве в соответствии с фактором роста  $u = 1.1$  и фактором падения  $d = 0.9$ . Предположим, что риск-нейтральная вероятность равна 0.5 (вы получили это из наблюдаемых цен облигаций).
- Посчитайте цены (в моменты времени  $t = 0$  и  $t = 1$ ) бескупонной облигации с номиналом 100, срок которой истекает в  $t = 2$ .
  - Посчитайте цену (в момент времени  $t = 0$ ) колл-опциона на такую же облигацию, если её срок истекает в момент времени  $t = 1$ , а цена исполнения равна 95.

### Домашнее задание 4

#### Про функции полезности

1. Покажите, что для  $u(W) = \ln W$  ожидаемая полезность игры Санкт-Петербург равна  $2 \ln 2$ . Чему равен безрисковый эквивалент (*certainty equivalent*), если функция полезности игрока имеет вид:

(a)  $u(W) = 5 \ln(W)$

(b)  $u(W) = \sqrt{W}$

2. Покажите, что логарифмическая функция полезности  $u(X) = \ln X$  – это частный случай функции полезности типа CRRA (постоянное относительное неприятие риска) для  $\gamma \rightarrow 1$ . Подсказка: используйте следующую формулу CRRA:  $u(X) = \frac{X^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$  и правило Лопиталя (*L'Hospital's rule*). Почему  $u(X) = \frac{X^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$  эквивалентна  $u(X) = \frac{X^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ ?

3. Функции полезности типа HARA (гиперболическое абсолютное неприятие риска) имеют следующий коэффициент абсолютного неприятия риска:

$$\gamma_a = -\frac{u''(W)}{u'(W)} = \frac{1}{\alpha + \beta W} > 0$$

То есть абсолютное неприятие риска растет, если  $\beta$  отрицательна, и падает, если  $\beta$  положительна.

- (a) Покажите, что относительное неприятие риска функции полезности типа HARA растет, если  $\alpha$  положительна, и падает, если  $\alpha$  отрицательна.
- (b) С помощью интегрирования выведите функциональную форму функции полезности типа HARA.

#### Выбор потребительского портфеля в один период

4. Переформулируйте задачу максимизации полезности (2.5) из конспектов лекций, используя доходности активов  $R_i = \frac{S_i(1)}{S_i(0)} - 1$  и веса в портфеле  $\Pi_i = \frac{\delta_i S_i(0)}{x}$ .

- (a) Покажите, что условие первого порядка для данной задачи – это (2.9) из конспектов лекций, а также что оно может быть преобразовано в уравнение (2.8). Также напрямую покажите, что (2.9) эквивалентно (2.6).

Теперь рассмотрим однопериодную биномиальную модель (с безрисковыми облигациями и только одним рисковым активом – акцией), где цена акции меняется от  $S(0)$  либо к  $S(0)u$  с вероятностью  $\pi$ , либо к  $S(0)d$  с вероятностью  $1 - \pi$ . Предположим, что  $d < 1 + r < u$ .

- (b) Используя вашу формулировку задачи из части (a) и логарифмическую функцию полезности  $u(x) = \ln x$ , посчитайте, какова оптимальная доля вашего богатства, которую вы инвестировали бы в акции.
- (c) Повторите часть (b) для показательной функции полезности  $u(x) = \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma}$ .

*Анализ в пространстве доходности и дисперсии (mean-variance analysis) с использованием только рискованных активов*

5. Покажите, что  $B$ ,  $C$  и  $D$  в (2.20) – строго положительные числа.
6. Покажите, что мы получим следующие выражения для множителей Лагранжа в задаче оптимизации в пространстве доходности и дисперсии только с рискованными активами:

$$\lambda_1 = \frac{C\mu - A}{D} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{B - A\mu}{D}$$

7. Выведите уравнение (2.21) из конспектов лекций из уравнения (2.19) и выражений для множителей Лагранжа, приведенных выше.
8. Покажите справедливость уравнения (2.22) из конспектов лекций.
9. Рассмотрим задачу оптимизации в пространстве доходности и дисперсии только с двумя рискованными активами. Актив 1 – это акции AT&T с ожидаемой доходностью 10% и стандартным отклонением 15%. Актив 2 – это акции Майкрософт с ожидаемой доходностью 21% и стандартным отклонением 25%. Рассмотрим 4 случая с разными корреляциями между доходностями двух активов:  $\rho = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\rho = 0$ ,  $\rho = -1$ . Используйте Mathematica или другую программу, чтобы составить список портфелей, в котором вы меняете вес актива 1 в портфеле от -50% до 150% с шагом в 1%. Для каждого из 4 случаев нарисуйте границу портфеля (*portfolio frontier*) в пространстве <стандартное отклонение–ожидаемая доходность> (Заметим, что с двумя активами оптимизация не нужна.)
- Выведите аналитическую формулу для ожидаемых доходностей и дисперсии портфеля с минимальной дисперсией. Сравните с вашими графиками.
10. Теперь нарисуйте границу портфеля для случая с 4 активами. Добавьте два актива к двум из предыдущего упражнения, а именно, актив 3 с ожидаемой доходностью 7.5% и стандартным отклонением 5% и актив 4 с ожидаемой доходностью 12.5% и стандартным отклонением 7.5%. Корреляционная матрица выглядит следующим образом:

Корреляции	Актив 1	Актив 2	Актив 3	Актив 4
Актив 1	1	0.5	0.15	0.3
Актив 2	0.5	1	0.1	0.25
Актив 3	0.15	0.1	1	0.2
Актив 4	0.3	0.25	0.2	1

В добавок к границе, покажите четыре актива и портфель с минимальной дисперсией на вашем графике.



## Домашнее задание 5

*Анализ в пространстве доходности и дисперсии (mean-variance analysis) с рисковыми активами и безрисковыми облигациями*

1. Проверьте справедливость уравнения (2.26) из конспекта лекций.
2. Докажите, что  $H > 0$  (уравнение (2.26) из конспекта лекции). Для случая  $r < \frac{A}{C}$  покажите, что коэффициент Шарпа  $\frac{\bar{\mu} - r}{\sigma(R_{\tilde{\pi}^*})}$  в уравнении (2.34) из конспекта лекций равен  $\sqrt{H}$ .
3. Покажите, что оптимальный портфель рискованных активов  $\tilde{\pi}^*$ , заданный в уравнении (2.30) из конспекта лекций, лежит на эффективной границе с только рискованными активами. Иными словами, покажите, что выражение для  $\tilde{\pi}^*$  может быть записано в форме оптимального портфеля согласно (2.21) для  $\mu = \tilde{\mu} = \tilde{\pi}^{*T} \mu$  и что  $\tilde{\pi}^*$  лежит на эффективной части границы при предположении, что  $r < \frac{A}{C}$ .
4. Найдите решение задачи (2.35) и покажите, что оно совпадает с (2.30).
5. Вы можете инвестировать в два рискованных актива. Актив 1 имеет ожидаемую доходность  $\mu_1 = 0.1$  и стандартное отклонение  $\sigma_1 = 0.3$ , а актив 2 имеет ожидаемую доходность  $\mu_2 = 0.2$  и стандартное отклонение  $\sigma_2 = 0.5$ . Их коэффициент корреляции равен  $\rho = 0.2$ .
  - (a) Найдите точку минимальной дисперсии и стратегию, с помощью которой она может быть достигнута.
  - (b) Выполните пункт (a) при условии, что также доступен безрисковый актив с доходностью  $r = 0.05$ .
  - (c) Найдите портфельные веса оптимального взаимного фонда (оптимальный портфель рискованных активов) для пункта (b).
  - (d) Предположим, что вы инвестор с полезностью типа CARA (*constant absolute risk-aversion*). Предположим, что доходность актива распределена нормально. Таким образом, вы можете записать свою функцию полезности в терминах безрискового эквивалента (*certainty equivalent*). В вашем случае положим, что это означает следующее:  $U(E[R], \sigma) = E[R] - 5\sigma^2$ . (Каков ваш коэффициент абсолютного неприятия риска?) Определите ваш оптимальный портфель. Представьте ваш итоговый результат в терминах весов актива 1, актива 2 и безрискового актива в вашем портфеле.
6. Используйте Mathematica или иное программное обеспечение для решения следующего практического задания.

Возьмите ежедневные данные за пять лет по пяти индексам цен на акции: Dow Jones Industrial Index 30 (США), FTSE 100 (Великобритания), CAC 40

(Франция), DAX 30 (Германия) и NIKKEI 225 (Япония). Для этого вы можете использовать, например, поиск по наименованиям DJI , FTSE, FCHI, GDAXI, N225 на <http://finance.yahoo.com/>. Убедитесь, что вы загрузили данные с правильными датами.

- (a) Изобразите гистограммы ежедневных доходностей для каждого индекса.
- (b) Рассчитайте ожидаемые доходности и матрицу ковариаций доходностей.
- (c) Умножьте ожидаемые доходности и ковариации на количество рабочих дней, чтобы получить годовые данные.  
Теперь у вас есть необходимые данные для анализа в пространстве доходности и дисперсии (*mean-variance analysis*).
- (d) Рассчитайте портфельные веса, ожидаемую доходность и стандартное отклонение портфеля с минимальной дисперсией.
- (e) Найдите эффективную границу. Для этого вы можете выбрать некоторую (разумную) доходность, найти соответствующий эффективный портфель и вычислить его стандартное отклонение. Когда вы найдете два портфеля, вы сможете использовать известный вам алгоритм, чтобы получить другие эффективные портфели. Изобразите все эти точки графически в пространстве  $\sigma$ – $\mu$ .

### CAPM

7. Ожидаемая доходность и стандартное отклонение рыночного портфеля составляют 8% и 12% соответственно. Ожидаемая доходность ценной бумаги А составляет 6%. Стандартное отклонение ценной бумаги В составляет 18%, а её специфический риск равен  $(10\%)^2$ . Портфель, инвестирующий  $\frac{1}{3}$  своей стоимости в бумагу А и  $\frac{2}{3}$  – в В, имеет бета-коэффициент, равный 1. Какова безрисковая ставка и ожидаемая доходность В согласно CAPM?
8. Рассмотрим рынок, состоящий лишь из двух активов: А и В. На рынке размещено 100 акций актива А, продаваемых по цене \$1 за акцию, и 100 акций актива В по \$2 за акцию. Средняя норма доходности актива А  $\mu_A = 10\%$ , актива В –  $\mu_B = 6\%$ . Безрисковая норма доходности  $r = 5\%$ . Стандартное отклонение рыночной доходности  $\sigma_M = 20\%$ . Предположим, что рынок в точности соответствует теории CAPM.
  - (a) Какова ожидаемая доходность рыночного портфеля?
  - (b) Найдите бета-коэффициент актива А и актива В.
  - (c) Какова ковариация рынка  $\sigma_{MA}$  с активом А?

## Домашнее задание 6

1. Предположим, что существует процесс, генерирующий доходности, в виде двухфакторной модели без идиосинкратического риска. Информация об ожидаемых доходностях трех активов (А, В и С) и их факторных нагрузках (чувствительностях) по отношению к двум факторам приведена в следующей таблице:

	$E[R_j]$	$\beta_{j1}$	$\beta_{j2}$
А	0.033	0.9	0.8
В	0.0315	0.7	0.9
С	0.0325	1.0	0.5

- (a) Получите портфельные веса двух факторных портфелей и их ожидаемые доходности.
- (b) Получите реплицирующий портфель для безрискового актива и его доходность.
- (c) Если бы доходность безрискового актива была  $r = 0.025$ , то какой арбитражной стратегии вы бы придерживались и какова была бы прибыль от этой стратегии?
- (d) Напомним, что фундаментальное уравнение ценообразования АРТ (*arbitrage pricing theory*) в случае двухфакторной модели выглядит следующим образом:

$$E[R_j] = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_{j1} + \lambda_2 \beta_{j2}$$

Вычислите значения  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и убедитесь в том, что они представляют собой безрисковую доходность и премии за риск двух факторных портфелей соответственно.

2. Мисс Бетель, менеджер взаимного фонда "Humongous Mutual Fund", знает, что в настоящее время её фонд хорошо диверсифицирован и что его бетакоэффициент из CAPM составляет 1.0. Безрисковая ставка составляет 8%, а премия за риск,  $E[R_m] - r_f$ , равна 6.2%. Она изучала вопрос измерения рисков и поэтому знает, что существует как минимум два фактора: изменение индекса промышленного производства и неожиданная инфляция с соответствующими им премиями за риск  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Уравнение АРТ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} E[R_i] &= r_f + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} = \\ &= 0.08 + 0.05 b_{i1} + 0.11 b_{i2} \end{aligned}$$

- (a) Какова чувствительность её портфеля к неожиданной инфляции, если в настоящий момент его чувствительность к первому фактору равна  $b_{P1} = -0.5$ ?

- (b) Какой станет чувствительность портфеля к первому фактору, если мисс Бетель реорганизует его так, чтобы сохранить ожидаемую доходность, но при этом снизить зависимость от инфляции до нуля (т.е.  $b_{P2} = 0$ )?
3. Сформулируйте задачу о выборе портфеля в один период, в которой инвестор получает полезность от потребления как в момент времени 0, так и в момент времени 1. Предположим, что доступен один безрисковый актив и  $N$  рискованных активов. Покажите, что вы получаете условие оптимальности в форме уравнения (2.13) из конспекта лекции.

## Поведенческая экономика

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

Общий вес: 157 баллов.

1. (61 балл) Несостоятельность во времени (*Time inconsistency*)

Братья Петя, Ваня и Андрей ходят в кино по субботам. У них есть деньги только на 4 фильма из пяти, которые показывают в этом месяце (так уж получилось, что в этом месяце пять суббот). У них одинаковые полезности от фильмов которые представлены в таблице. Все имеют полезности  $U_t = u_t + \beta (0.9999)^i u_{t+i}$ . Петя состоятельный во времени (*time consistent*), Ваня опытный и несостоятельный во времени (*sophisticated time inconsistent*) ( $\beta = \beta^* = 1/2$ ) и Андрей наивный и несостоятельный во времени (*naive time inconsistent*) ( $\beta = 1/2, \beta^* = 1$ ). В решении можете заменять  $\delta = 0.9999$  на  $\delta = 1$ , когда это не принципиально. Полезности от похода в кино следующие:

Таблица 1: Полезности от похода в кино

1-ая суббота	3
2-ая суббота	3
3-я суббота	5
4-ая суббота	8
5-ая суббота	13

- (a) (3 балла) В какой день Петя не пойдет в кино?  
 (b) (5 баллов) В какой день Ваня не пойдет в кино?  
 (c) (5 баллов) В какой день Андрей не пойдет в кино?

Иван, Петр и Андрей могут договориться со своей мамой и поехать на дачу, чтобы помочь ей там со строительством дома. Данный договор не может быть прекращен. Их полезность от данной поездки составит -1.

- (d) (3 балла) Поедет ли Петр на дачу? Если да, то на какой неделе?  
 (e) (10 баллов) Поедет ли Иван на дачу? Если да, то на какой неделе?  
 (f) (10 баллов) Поедет ли Андрей на дачу? Если да, то на какой неделе?

Также Иван, Петр и Андрей делают домашние задания на 1-й, 2-й и 3-й неделях в субботу. Для этого им нужно прочесть 12 страниц учебника. Потратив  $h$  в день, они могут прочесть  $p = \sqrt{h}$  страниц и получить полезность  $u = -h$ . (Предположите здесь, что  $\delta = 1$ .)

- (g) (5 баллов) Как Петр распределит свое время на домашнее задание в указанные выходные?
- (h) (10 баллов) Как Иван распределит свое время на домашнее задание в указанные выходные?
- (i) (10 баллов) Как Андрей распределит свое время на домашнее задание в указанные выходные?

2. (25 баллов) Зависимость полезности от предпочтений (*Reference-dependent utility*). Опорный критерий (*Reference Point*). Ожидания

Оля идет покупать на рынок туфли. Она ожидает, что на рынке возможны две цены ( $p_l = 4, p_h = 10$ ), вероятность  $Pr(p = p_h) = 0.5$ . Олипа полезность  $u(c_1, c_2; r_1, r_2) = v c_1 + n(v(c_1 - r_1)) - c_2 + n(r_2 - c_2)$ . Здесь  $c_1$  – туфли (1 если купила, 0 если нет),  $c_2$  – деньги. Полезность, основанная на прибылях и убытках (*gain-loss utility*),  $n(x) = x$  для  $x > 0$  и  $n(x) = \lambda x$  для  $x < 0$ . Ценность туфель  $v = 12$ .

Опорные критерии (*reference points*) – ее ожидания относительно денег, которые она потратит, и туфель, которые она купит.

- (a) (5 баллов) Пусть страх потери (*loss aversion*)  $\lambda = 1$ . Как себя будет вести Оля когда придет на рынок?  
Далее пусть  $\lambda = 2$ .
- (b) (10 баллов) Опишите самоподдерживающиеся (равновесные) стратегии Оли.
- (c) (10 баллов) Докажите, что они самоподдерживающиеся.

3. (30 баллов) Футболист Иванишев до сих пор не знает, насколько хорошо он забивает голы, несмотря на то что он играет во всех главных футбольных лигах. Он думает, что он супер-звезда среди бомбардиров с вероятностью 0.5, и поэтому забивает гол в конкретной игре с вероятностью 0.8. Он также подозревает, что он может быть просто отличным бомбардиром с такой вероятностью, что он забивает с вероятностью 0.4. Сейчас он играет в российской лиге, и у него 8 игр в сезоне. Он уже сыграл 3 игры и не забил ни в одной из них. Располагая данной информацией, пересмотрите его статус супер-звезды.

- (a) (10 баллов) Какова вероятность, что Иванишев супер-звезда?
- (b) (10 баллов) Какова его догадка про данную вероятность, если он слишком занят, чтобы размышлять над этим вопросом, и просто верит в закон малых чисел с размером урны равным 8 играм?

- (c) (10 баллов) Его друг Моуринью хочет поспорить с ним касательно следующего матча. Он предлагает 1 пиво против 10 на то, что Иванишевич не забьет ни одного гола в следующей игре. Следует ли Иванишевичу соглашаться на спор? Станет ли он это делать?

4. (45 баллов) Эмпирика и короткие вопросы

Приведите пример из области поведенческой экономики, т.е. эмпирические статьи (не эксперименты!), которые обсуждались на лекциях, по нижеуказанным темам. Вам не нужно помнить авторов, но нужно рассказать идею и посыл. Не более 100 слов на каждый ответ.

- (a) (5 баллов) Опорный критерий (*reference point*).
- (b) (5 баллов) Несостоятельность во времени (*time inconsistency*).
- (c) (5 баллов) Ошибка игрока (*gambler fallacy*).
- (d) (5 баллов) Эвристика (*heuristics*).
- (e) (5 баллов) Смещение проекции (*projection bias*).

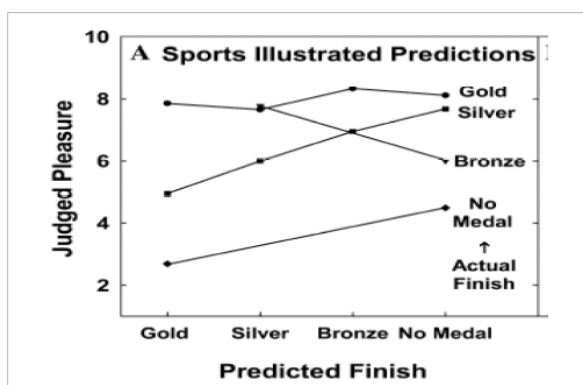
Обсудите понятия ниже (необязательно с примерами статей):

- (f) (5 баллов) Социальный множитель (*social multiplier*).
- (g) (5 баллов) В статьях где агенты используют механизм обязательства (*commitment device*) для контроля прокрастинации, какой тип агентов обычно делает это (использует указанный механизм)? Будьте как можно более точными.
- (h) (5 баллов) Мария, решающая по поводу распределения призов между Ольгой и Катей, делает выбор в пользу (8, 8), а не (15, 7.5). Возможно ли объяснить данный факт только с точки зрения предпочтений Ролсона (*Rawlsian preferences*), или что-то еще должно быть задействовано? Будьте как можно более точными.
- (i) (5 баллов) В задаче 2 полезность Ольги представлена следующей функцией:  $V(m, r) = (m - r)$ , когда  $m \geq r$ , и  $V(m, r) = \lambda(m - r)$ , когда  $m < r$ . Предпочтения Джейн выглядят так:  $V(m, r) = \frac{m - r}{\lambda}$ , когда  $m \geq r$ , и  $V(m, r) = -\lambda(r - m)$ , когда  $m < r$ . Приведите описание (в словах) того, как эти предпочтения отличаются от предпочтений Оли, указанных выше, и как это отражается на принятии Джейн решений относительно изменений в финансах.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1

1. Получите таблицу полезностей для Кати, которая продает туфли и у которой опорные критерии (*reference points*) выражены в терминах ожиданий.
2. Объясните картинку ниже (репликация, доработка известного эксперимента Medvec et al. [1995]<sup>1</sup>), основываясь на пройденных на лекциях материалах. Пожалуйста, используйте не более 100 слов.



3. Имея опорные критерии, основанные на ожиданиях, Джон хочет купить ботинки и сталкивается с высокой ценой с вероятностью 1. Он также имеет страх потери с коэффициентом 4. Ценность ботинок для него составляет 1. (Высокая) цена ботинок – 1.5.
  - (a) Можем ли мы столкнуться с такой ситуацией, что Джон не купит туфли? Объясните. Что вы думаете по этому поводу, если вы находитесь в мире классической теории полезности?
  - (b) Возможно ли, что Джон купит туфли? Что вы думаете по этому поводу, если вы находитесь в мире классической теории полезности?
4. Агент имеет следующую функцию полезности:  $v(x) = \{x \text{ для } x \geq 0\}$  и  $\{2x \text{ для } x < 0\}$ . Он инвестирует каждый день на протяжении следующих двух дней. Каждый день могут произойти два события: он инвестирует \$3000 с вероятностью  $1/4$  или \$1000 с вероятностью  $3/4$ .

Допустим, что он может выбрать, когда проверить доходность своего портфеля: либо в конце каждого дня, либо только в конце второго дня. Даже если он выбирает первую опцию, он не может изменить свой портфель после первого дня. Он ожидает, что ценность портфеля суммируется по дням,

<sup>1</sup>Victoria Husted Medvec, Scott F Madey, and Thomas Gilovich. When less is more: counterfactual thinking and satisfaction among olympic medalists. *Journal of Personality and Social Psychology*, 69 (4):603, 1995



так что если он проверяет в конце каждого дня, его полная ожидаемая ценность равна его ожидаемой ценности за первый день плюс его ожидаемая ценность за второй день. Но если он проверяет только в конце второго дня, его полная ожидаемая ценность портфеля – это просто ожидаемая ценность от суммы исходов за оба дня. (Он сталкивается с доходами или убытками вне зависимости от того, проверяет он в конце каждого дня или только в конце второго.)

- (a) Что он предпочтет: проверять доходность в конце каждого дня или только в конце второго дня? Объясните алгебраически и интуитивно. Теперь предположите, что перед ним стоит тот же выбор, но если он решает проверять портфель в конце каждого дня, он может вывести деньги с биржевого рынка (единственная опция) в конце первого дня, если пожелает. Далее предположите, что даже если он решает проверять в конце каждого дня, его ценность по-прежнему определяется его прибылями и убытками за оба дня с опорным критерием равным 0.
- (b) Каким будет его решение по поводу инвестиций в конце первого дня, если он обнаружит, что его акции выросли на \$3000? Объясните алгебраически и интуитивно.
- (c) Каким будет его решение по поводу инвестиций в конце первого дня, если он обнаружит, что его акции упали на \$1000?
- (d) Учитывая инвестиционные решения в (b) и (c) и предполагая, что он нарушает любое равновесие, сохраняя свои акции в любом случае, что он предпочтет: проверять доходность в конце каждого дня или только в конце второго?

##### 5. Предпочтения с уклоном в настоящее (*present bias preferences*). Часть 1

Покажите, что в примере кумулятивной прокрастинации (прочсть 30 страниц за 30 дней) опытный (*sophisticated*) человек потратит около 38-39 часов на освоение материала.

##### 6. Предпочтения с уклоном в настоящее (*present bias preferences*). Часть 2

Боб принял предложение о работе и должен приступить к выполнению задач через 30 дней ( $T = 30$ ). В силу специфики его должности, ему нужно быть абсолютно здоровым. К сожалению, у Боба возникли некоторые проблемы со здоровьем, решение которых становится все сложнее с течением времени. Ему нужно поправить здоровье, и последний день, когда он может это сделать, будет через 30 дней, при  $T = 30$ . Начиная с сегодня ( $t = 0$ ), каждый последующий день увеличивает его финансовые затраты на решение вопросов здоровья по экспоненциальной функции:  $c(t) = 100(1.1)^t$ . Он может выбрать, в какой день он бы хотел решить проблемы со здоровьем.

- (a) Предполагая, что у Боба есть экспоненциальное дисконтирование с  $\delta = 1$ , каким будет оптимальное решение? Когда он пойдет к врачу? Сколько он ему заплатит?

- (b) Предполагая, что Боб наивный (*naive*) с  $\delta = 1$  и  $\beta = 0.9$ , когда он пойдет к врачу? Сколько он ему заплатит?
- (c) Если Боб опытный (*sophisticated*) с  $\delta = 1$  и  $\beta = 0.9$ , когда он пойдет к врачу? Сколько он ему заплатит?
- (d) Его проблемы со здоровьем имеют инфекционный характер, и дополнительные затраты для общества возрастают с аналогичной скоростью:  $c(t) = 100(1.1)^t$ . Боба это не волнует, но рациональное (это важно) правительство это беспокоит. Правительство может выделить субсидии для Боба, чтобы он сходил к врачу. Как правительство должно поступить? Ответьте для каждого из описанных в предыдущих пунктах случаев.

---

## Прикладная микроэконометрика

---

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

Общий вес работы: 100 баллов.

*Инструкции:* На экзамене нельзя пользоваться никакими материалами, кроме бумажной копии статьи [Gagliarducci and Nannicini \[2013\]](#)<sup>1</sup> без каких либо пометок.

1. (13 баллов) Национальная программа солидарности (НПС) была запущена в Афганистане в июне 2003, чтобы развить институты гражданского общества, местного самоуправления и снизить уровень бедности, предоставив деревням доступ к продвинутой инфраструктуре. В деревнях-участницах программа требует избрание местного консула по развитию через тайное голосование. После избрания консул обязан создать черновую версию локального плана развития и предложить различные проекты по улучшению инфраструктуры и повышению человеческого капитала, которые бы профинансировались из средств НПС. Предложенные проекты, удовлетворяющие требованиям НПС, далее финансируются грантами, размер которых определяется по числу жителей деревни (в среднем \$200 на человека и максимум \$60000 на всю деревню).
  - (a) Предположим, вам хочется оценить эффект программы НСП на экономическое благосостояние. Какие проблемы могут быть у оценки, которая просто сравнивает деревни участницы программы НСП и деревни, которые не попали в программу?
  - (b) Опишите дизайн эксперимента, который бы позволил вам оценить эффект программы НСП на экономическое благосостояние.
  - (c) Какие могут быть проблемы с внешней и внутренней валидностью оценки, полученной из вашего дизайна эксперимента? Насколько они релевантны в данной ситуации?
2. (15 баллов)
  - (a) Какие основные предположения у оценок псевдорандомизацией (*matching estimators*)
  - (b) Для чего нужно применять PSM (*propensity score matching*), если можно применить точный метод?

---

<sup>1</sup>Stefano Gagliarducci and Tommaso Nannicini. Do better paid politicians perform better? disentangling incentives from selection. *Journal of the European Economic Association*, 11(2):369–398, 2013

- (c) Допустим, вы хотите воспользоваться какой то оценкой псевдорандомизации (*matching estimator*). Опишите, как можно имплементировать такую оценку.
- (d) Предложите тест, который проверит, выполняются ли необходимые для успешности вашей оценки предположения (тест плацебо).

3. (15 баллов)

- (a) Каковы два главных условия валидности инструмента? Что может произойти, если они нарушены?
- (b) Допустим, вы хотите оценить причинно-следственную связь между полицией и уровнем преступности. У вас есть количество полицейских на душу населения ( $X$ ) и уровень преступности ( $Y$ ) на уровне города. Допустим, у вас достаточно большая выборка и, допустим, вы можете получить данные о любом количественно измеримом показателе (например, количество труб в городе). Возможности провести эксперимент у вас нет.
  - i. Объясните, почему  $X$  может быть эндогенным в данной ситуации.
  - ii. Подумайте о том, куда будет направлено смещение при оценке стандартной МНК регрессией (OLS) эффекта  $X$  на  $Y$ .
  - iii. Придумайте валидный инструмент.

4. (7 баллов)

- (a) Опишите, в каких условиях необходимо применять метод максимального правдоподобия с ограниченной информацией (LIML).
- (b) Допустим, вы боретесь с проблемой эндогенности объясняющей переменной и используете метод инструментальных переменных. Вы сравниваете результаты инструментальной оценки и результаты метода максимального правдоподобия с ограниченной информацией. Оказывается, что оценка инструментальными переменными находится посередине между оценкой МНК и оценкой метода максимального правдоподобия с ограниченной информацией. О чем это говорит? Нарисуйте график, если вам это поможет.

5. (15 баллов). Известно, что экономическое развитие обладает неким постоянством, и уровень развития в прошлом оказывает сильное влияние на уровень развития в будущем. В экономической литературе утверждается, что социальный капитал (доверие, культура, уважение к окружающим) – это один из определяющих факторов экономического развития, который может объяснить долгосрочные различия в уровне развития. Многие утверждают, что опыт децентрализованного принятия решений в прошлом мог сильно повлиять на социальный капитал, который в некотором смысле передан современным поколениям. Италия является одним из примеров страны, в которой города в различных регионах сильно отличаются друг от друга по уровню

социального капитала. Некоторые итальянские города в Средние века были свободными децентрализованными полисами. В то время как в южной Италии долгое время господствовали норманы, помешавшие развитию независимых городов государств в этой части Италии, в северной Италии города города были лучше расположены с военной точки зрения и с большей вероятностью образовывали независимые государства. Известно, что Этруски были знамениты строительством городов в хорошо укрепленных местах.

- (a) В статье [Tabellini \[2008\]](#)<sup>2</sup> показывается, что в регионах с большей децентрализацией в государственном управлении в 17-18 веках более высокий уровень развития и дохода на душу населения сегодня. Убеждают ли вас аргументы о том, что децентрализация в Средние века влечет за собой более высокий уровень социального капитала, что влечет за собой более высокий уровень развития сегодня? Могут ли быть другие выводы из данной статьи?
- (b) Предположим, что вам известно, был ли итальянский город независимым городом-государством или нет. У вас есть все возможные данные об этих городах сегодня. Как вы можете проверить гипотезу о влиянии децентрализации в Средние века на уровень социального капитала, который, в свою очередь, обладает историческим постоянством и оказывает влияние на уровень развития сегодня? Какие вам необходимы условия идентификации? Какие потенциальные проблемы у предложенного вами подхода?
- (c) Предположим, что вам известно, является ли город северным городом этрусского происхождения. Как вы можете использовать эту информацию, чтобы улучшить ваш эмпирический подход из предыдущего пункта? Какие вам необходимы условия идентификации? Какие из этих условий вы можете протестировать?
- (d) Предположим, что теперь и для южных городов вам известно их этрусское происхождение. Как вы можете использовать эту информацию, чтобы улучшить эмпирический подход из предыдущего пункта. Какие вам необходимы условия идентификации? Какие из этих условий вы можете протестировать?
6. (15 баллов). Муниципалитет Оймьякона решил улучшить ситуацию с загруженностью дорог и организовал специальную полосу для городского транспорта на некоторых улицах. Все специальные полосы были введены в один день. Главный аргумент за введение полос – теперь большие и неповоротливые автобусы и маленькие машины не будут мешать друг другу на дороге, что в свою очередь увеличит среднюю скорость движения и снизит количество пробок. Вас просят оценить успешность реформы. Допустим, у вас имеется следующая кросс-секция: была ли введена специальная полоса или нет, уровень загруженности дороги и набор ковариатов

<sup>2</sup>Guido Tabellini. Institutions and culture. *Journal of the European Economic Association*, 6(2-3): 255–294, 2008

(инфраструктура, наличие большого торгового центра, население, лаги этих переменных).

- Можно ли просто сравнить среднюю загруженность дорог со специальной полосой и без и таким образом оценить эффект реформы?
- Опишите, как бы вы воспользовались псевдорандомизацией (*matching estimator*) для оценки эффекта реформы.
- Какие предположения необходимы, чтобы использование псевдорандомизации было валидно?
- Допустим, вы были бы ответственны за проведение реформы до ее внедрения. Как бы вы провели ее, чтобы хорошо оценить эффект?
- Можно ли обобщить результаты этого исследования применимо к другим странам? Как вы считаете, если провести такое исследование в России, какие будут результаты?
- Какие преимущества графического анализа над параметрическим?

7. (5 бонусных баллов). Посмотрите на график причинно-следственной связи ниже. Каждая вершина этого графика – это случайная величина, обозначенная заглавной буквой. Жирным кружком обозначены величины, которые мы наблюдаем, остальное – пустым кружком. Причинно-следственная связь обозначается стрелками (переменная в начале стрелки влияет на переменную в конце). Допустим, мы хотим оценить влияние D на Y. Подробно опишите, как бы вы могли выявить эту причинно-следственную связь.

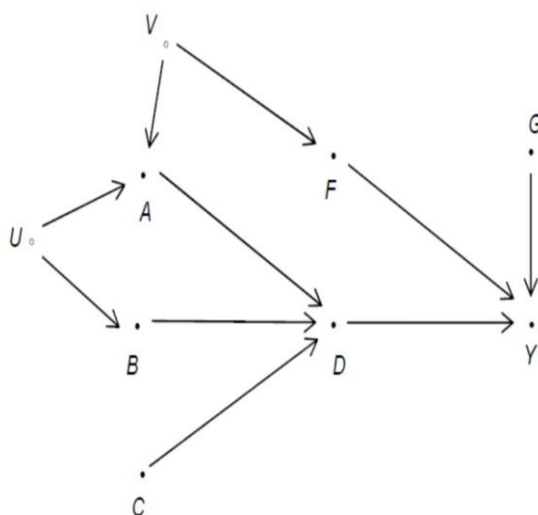


Figure 1

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1

1. (a) Проанализируйте плюсы и минусы эксперименталистского подхода к анализу данных (хотя бы 5 плюсов и минусов).  
(b) Проанализируйте плюсы и минусы структуралистского подхода к анализу данных (хотя бы 5 плюсов и минусов).
2. Прочитайте статью [Miguel and Kremer \[2004\]](#)<sup>1</sup>. Сделайте краткий пересказ статьи и обсудите подход авторов к выявлению причинно-следственной связи в данных.
3. Вам предлагается использовать базу данных с информацией о занятости в региональных органах государственного управления в США. Данные включают в себя информацию о том, был ли избран или назначен местный глава государственного управления, а также несколько дополнительных контрольных переменных.
  - (a) Подготовьте таблицу, которая содержит в себе описательные статистики всех важных переменных в данных.
  - (b) Нарисуйте гистограмму переменной <Население> и прокомментируйте полученное распределение.
  - (c) Создайте новую переменную, равную  $\ln(1+\text{Население})$ . Почему в данной ситуации мы добавляем 1 к переменной <Население>?
  - (d) Прodelайте то же, что было сделано в предыдущих двух пунктах, но теперь для переменной <Занятые>.
  - (e) Постройте регрессионную модель с переменной <ЛогарифмЗанятые> в качестве объясняющей и <Избран> в качестве объясняемой. Удостоверьтесь, что стандартные ошибки робастные. Прокомментируйте полученные результаты.
  - (f) Добавьте в модель из предыдущего пункта переменную <Логарифм-Население> в качестве объясняющей. Прокомментируйте полученные результаты.
  - (g) Создайте фиктивные переменные для каждого года (кроме одного) и добавьте их в качестве объясняющих переменных в модель из предыдущего пункта.
  - (h) По очереди добавляйте оставшиеся в данных переменные в качестве объясняющих в следующем порядке: <Логарифм-Доход>, <Логарифм-ПодушевойДоход>, <Процент-город>, <Процент-старше65>, <Процент-оконч-старшшкола>, <Безработица>, <Этнос>.

<sup>1</sup>Edward Miguel and Michael Kremer. Worms: identifying impacts on education and health in the presence of treatment externalities. *Econometrica*, 72(1):159–217, 2004

- (i) Для всех статистически значимых результатов объясните знаки коэффициентов.

Добавьте в файл с текстовыми ответами на вопросы задач код и красивую таблицу, которая бы иллюстрировала полученные результаты.

4. К анализу предлагаются результаты статьи [Di Tella and Fisman \[2004\]](#)<sup>2</sup> с разъяснением всех использованных переменных и их описательными статистиками в таблице ниже.

- (a) Предоставьте экономическую интерпретацию каждого из коэффициентов в колонках (20) и (22). Ваша интерпретация должна отражать не только знак, но и размер коэффициента.
- (b) Допустим, что все губернаторы-«хромые утки» получили право на переизбрание на следующий срок. Предположив, что все независимые переменные статистически перпендикулярны друг другу, и предположив, что средние значения по штатам с губернаторами-«хромыми утками» и общие средние не различаются, посчитайте средний эффект такого изменения на зарплату этих губернаторов.

Отчетность и электоральные циклы, 48 штатов США, 1950-90				
Контрольные переменные	(20)	(21)	(22)	(23)
Лог. дохода на душу	0.532 (0.117)		0.528 (0.146)	
Лог. налогов на душу		-0.049 (0.043)		-0.083 (0.041)
Лог. населения	0.201 (0.047)	0.153 (0.049)	0.208 (0.055)	0.154 (0.057)
Лог. конц. власти >2	-0.027 (0.013)	-0.027 (0.013)		
Хромая утка			-0.029 (0.020)	-0.030 (0.020)
Лог. конц. власти >2 × Лог. дохода на душу	-0.044 (0.042)			
Лог. конц. власти >2 × Лог. налогов на душу		-0.046 (0.024)		
Хромая утка × Лог. дохода на душу			-0.026 (0.051)	
Хромая утка × Лог. налогов на душу				-0.003 (0.027)

Зависимая переменная - это зарплата губернатора. В скобках - стандартные ошибки. Данные по налогам и доходам усреднены, чтобы можно было оценивать эффект "Хромой утки" как средний для штата со средним уровнем доходов населения. Фиксированные эффекты штата и года включены в модель.  $N = 960$ .  $Adj.R^2 = 0.93$ .

<sup>2</sup>Rafael Di Tella and Raymond Fisman. Are politicians really paid like bureaucrats? *The Journal of Law and Economics*, 47(2):477–513, 2004



## Домашнее задание 2

1. В файлах NSWtreated.xls и NSWcontrol содержатся данные о контрольной и экспериментальной группах лиц мужского пола участников Национальной программы стимулирования занятости, которые использовались в статье. В файле CPScontrol.xls содержатся данные опроса населения о вне-экспериментальной группе лиц для составления сравнительных групп с участниками эксперимента.

Переменные представлены в следующем порядке: участник программы занятости (1 - да, 0 - нет), возраст, образование, темнокожий (1 - да, 0 - нет), Испанское происхождение (1 - да, 0 - нет), женат (1 - да, 0 - нет), отсутствует ученая степень (1 - да, 0 - нет), реальный доход в 1975, реальный доход в 1978. Последняя переменная – объясняемая, остальные переменные не связаны с участием в эксперименте.

Вам предлагается воспользоваться методом псевдорандомизации и методом ближайшего соседа (*propensity score matching, nearest neighbor matching*), изученными на лекции, для оценки влияния программы на занятость. Чтобы воспользоваться псевдорандомизацией в Stata, вам может потребоваться установить дополнительные пакеты: 1) Наберите в поиске <search propensity score>, 2) Нажмите на st00262, 3) Нажмите кнопку <установить>.

Для метода ближайшего соседа придется проделать аналогичные действия, но начав с <search nnmatch>.

- (a) Постройте описательные статистики для объясняющих переменных, несвязанных с проведением эксперимента, для каждой из трех групп людей в отдельности. Продемонстрируйте нормированную (по стандартному отклонению) разницу между экспериментальной и двумя контрольными группами.
- (b) Посчитайте *propensity scores* для каждой контрольной группы. Постройте гистограмму <propensity scores>.
- (c) Оцените эффект программы, сравнив экспериментальную группу с каждой из двух контрольных. Воспользуйтесь следующими методами оценки эффекта:
  - i. Разность средних
  - ii. МНК (OLS) – с постоянными коэффициентами
  - iii. МНК (OLS) – с постоянными коэффициентами, отличающимися в экспериментальной и контрольной группах
  - iv. Ядерный мэтчинг по *propensity score*
  - v. Мэтчинг по методу ближайшего соседа
  - vi. Стратификация по *propensity score*
  - vii. Взвешивание по *propensity score*
  - viii. Мэтчинг по методу ближайшего соседа на объясняющих переменных

- ix. Мэтчинг по методу ближайшего соседа на объясняющих переменных вместе с регрессией (мэтчинг, корректирующий на смещение).
- (d) Удалите из выборки наблюдения, у которых *propensity score* выше 0.9 или ниже 0.1. Представьте описательные статистики для обрезанной выборки.
- (e) Пересчитайте *propensity scores* в новой выборке и постройте соответствующие гистограммы.
- (f) Постройте для новой выборки все оценки из пункта (с).
2. (a) Создайте выборку из 1000 наблюдений, которая содержит следующие переменные: логарифм зарплаты, образование и переменную  $Z$ .
- $\ln(\text{Зарплата}_i) = a + b \cdot \text{Образование}_i + e_i$ . Образование принадлежит целым числам отрезка  $[8, 16]$ .  $e_i$  – независимые одинаково распределенные стандартно нормальные величины.
  - $Z$  – бинарная переменная. Если  $Z = 0$ , то переменная образование равномерно распределена на множестве целых чисел отрезка  $[8, 16]$ . Если  $Z = 1$ , то:

$$Pr(\text{Образование} = x) = \frac{1}{12} \text{ для } x < 16$$

$$Pr(\text{Образование} = x) = \frac{1}{3} \text{ для } x = 16$$

- (b) Воспользуйтесь МНК-оценкой (OLS), чтобы оценить эффект образования на доход. Далее оцените эффект образования на доход, используя  $Z$  в качестве инструментальной переменной. Как бы вы интерпретировали переменную  $Z$ ? Сравните полученные оценки и объясните результаты.
- (c) Воспользуйтесь МНК-оценкой (OLS), чтобы оценить эффект окончания старшей школы (пусть старшая школа требует 12 лет учебы) на доход. Оцените эффект на доход, используя  $Z$  в качестве инструментальной переменной. Как бы вы интерпретировали переменную  $Z$ ? Сравните полученные оценки двух методов и оценки предыдущего пункта, объясните результаты.

### Домашнее задание 3

Для решения задачи необходимо прочитать статью [Duflo \[2001\]](#)<sup>1</sup>.

#### 1. Часть 1: Эстиматор Вальда и метод разности разностей (difference-in-differences)

В Июле 1978 года мятежники-сандинисты взяли штурмом Манагуа, завершив длительное правление семьи Сомоза в Никарагуа. Одним из главных направлений в политике молодого Сандинистского государства было массовое реформирование системы образования. Важной частью реформ было строительство тысяч новых школ, в особенности в самых бедных деревнях страны. В этой задаче вам предлагается вывести некоторые теоретические результаты из литературы по оценке эффекта политических программ и воспользоваться ими для анализа данных опросов домохозяйств мониторинга экономического положения и здоровья Никарагуа 1998 года. Предположим, что данные о зарплатах сгенерированы следующим образом:

$$w_{ij} = \alpha + \beta P_i + \gamma C_{ij} + \eta S_{ij} + \{\zeta(P_i C_{ij}) + v_i + e_{ij}\}.$$

Выражение в фигурных скобках ненаблюдаемо. Индекс  $i = 1 \dots N$  – это принадлежность к конкретному региону в Никарагуа. Индекс  $j = 1 \dots M_i$  – номер опрошенного домохозяйства в регионе  $i$ . Переменные в модели обозначают следующее:

$w_{ij}$  – логарифм заработной платы;

$P_i$  – бинарная переменная, 1 – было построено много новых школ (экспериментальная группа регионов), 0 – было построено мало новых школ в регионе  $i$  (контрольная группа регионов);

$C_{ij}$  – бинарная переменная, 1 – возраст человека  $ij$  меньше 6 в Июле 1978 (на него повлияла новая политика), 0 – возраст больше 15 в Июле 1978 (политика не должна иметь эффекта);

$S_{ij}$  – получено лет образования;

$v_i$  – фиксированный эффект региона;

$e_{ij}$  – ошибка.

- Прокомментируйте эмпирическую модель заработной платы, предложенную выше. Какой знак ожидается у каждого из коэффициентов модели? Какую структуру ошибки следует использовать для работы с этой моделью?
- Посчитайте среднюю зарплату индивидов в регионах участниках программы и в регионах, не попавших в программу ( $E[w_{ij}/P_i = 1]$ ,  $E[w_{ij}/P_i = 0]$ ).

<sup>1</sup>Esther Duflo. Schooling and labor market consequences of school construction in indonesia: Evidence from an unusual policy experiment. *American Economic Review*, 91(4):795–813, 2001

- (c) Воспользуйтесь ответом предыдущего пункта, чтобы оценить предел по вероятности оценки коэффициента в регрессионной модели  $w_{ij} = \alpha + \eta S_{ij} + v_i + e_{ij}$  методом инструментальных переменных, где  $S_{ij}$  инструментуруется с помощью  $P_i$ .
- (d) Какие необходимые условия идентификации для  $\hat{\eta}_{IV} \xrightarrow{P} \eta$ ? По вашему мнению, выполняются ли эти условия в данных из статьи, учитывая информацию о способе выбора регионов для строительства школ?
- (e) Теперь получите средние зарплаты для регионов и индивидов, участвовавших и не участвовавших в программе ( $E[w_{ij}/P_i = 1, S_{ij} = 1]$ ,  $E[w_{ij}/P_i = 0, S_{ij} = 1]$ ,  $E[w_{ij}/P_i = 1, S_{ij} = 0]$ ,  $E[w_{ij}/P_i = 0, S_{ij} = 0]$ ).
- (f) Воспользуйтесь ответом предыдущего пункта, чтобы построить оценку, аналогичную оценке Duflo из статьи, для  $\eta$ . Оцените предел по вероятности для этой оценки и обсудите выполнимость условий идентификации.
- (g) Допустим, что Сандинистское государство таргетировало строительство школ в регионах, где рыночная ценность детского труда крайне низкая в сравнении с взрослым трудом. Повлияет ли это на нарушение условий идентификации из предыдущего пункта? Какой будет знак у смещения, если оно присутствует, в результате такого механизма?

## 2. Часть 2: Гетерогенный эффект образования

Рассмотрим усложненную модель из предыдущей задачи, в которой эффект образования гетерогенен:

$$w_{ij} = \alpha + \beta P_i + \gamma C_{ij} + \delta I_{ij} + \eta_{ij} S_{ij} + \{\zeta(P_i C_{ij}) + v_i + e_{ij}\}$$

$$\eta_{ij} = \bar{\eta} + \lambda I_{ij},$$

где  $I_{ij} = 1$ , если родители индивида  $ij$  грамотные, и 0 – иначе.

- (a) Какой предполагаемый знак у коэффициентов  $\delta$  и  $\lambda$ . Объясните.
- (b) Оцените восемь условных матожиданий аналогично пункту (e) предыдущей части задачи (В матожидание теперь добавится условие на  $I_{ij}$ ).
- (c) Используйте результаты предыдущего пункта, чтобы получить оценки коэффициентов  $\bar{\eta}$  и  $\lambda$ .

## 3. Часть 3: Эмпирика

Воспользуйтесь данными из файла `nicaragua.dta`, чтобы получить оценку коэффициентов из пунктов (1.c), (1.f) и (2.c). Проинтерпретируйте результаты с точки зрения теоретического анализа в частях 1 и 2. Получилось ли у государства Сандинистов добиться сильного эффекта на зарплату индивидов из неблагополучных семей?

## Домашнее задание 4

В этом домашнем задании вам придется оценить эффект электорального преимущества политиков у власти над оппозиционерами, используя данные из статьи Lee [2008]<sup>1</sup>. Авторы используют метод разрывной регрессии для идентификации и сравнивают дистрикты, в которых Демократическая партия едва выиграла прошлые выборы, и дистрикты (а значит, эффект преимущества победителя должен быть незначительным), в которых Демократическая партия едва проиграла прошлые выборы. Объясняемая переменная – это результаты следующих выборов. Все переменные определяются с точки зрения долей Демократической партии.

<i>Переменная</i>	<i>Описание</i>
mov	Доля преимущества демократической партии на выборах в момент $t$
demsharenext	Доля голосов демократической партии в момент $t + 1$
demshareprev	Доля голосов демократической партии в момент $t - 1$
demwinprev	1, если Демократическая партия выиграла в $t - 1$ , 0 иначе
demofficeexp	Опыт демократического кандидата в политике в момент $t$
demelectexp	Электоральный опыт демократического кандидата в момент $t$
othofficeexp	Опыт оппозиционного кандидата в политике в момент $t$
othelectexp	Электоральный опыт оппозиционного кандидата в момент $t$
statediscdec	Кластер по штату-дистрикту-декаде

### 1. Часть 1. Создание экспериментальной переменной

Создайте переменную *mov*, которая обозначает долю преимущества демократической партии на выборах в момент  $t$ . Создайте экспериментальную переменную, которая равна 1, если демократы выиграли выборы в  $t - 1$ . Предположите, что в выборах участвуют две партии. Объясните механизм распределения между экспериментальной и контрольной группой.

### 2. Часть 2. График разрывной регрессии, с использованием локальных средних

- Разделите переменную *mov* на блоки (начиная от 0.01 до 0.25 с шагом 0.01) с обеих сторон от порога. Посчитайте среднее значение объясняемой переменной в каждом из блоков. Постройте график со средними значениями объясняемой переменной в каждом из блоков. Что вы видите?
- Воспользуйтесь полиномиальными приближениями, чтобы оценить эффект в точке разрыва. Постройте регрессию объясняемой переменной на константу и полином четвертой степени с каждой стороны от точки разрыва. Постройте график со средними значениями и полиномиальным приближением.

<sup>1</sup>David S Lee. Randomized experiments from non-random selection in us house elections. *Journal of Econometrics*, 142(2):675–697, 2008

3. *Часть 3. Оценка эффекта методом разрывной регрессии*

- (a) Оцените эффект электорального преимущества политиков у власти с помощью разрывного полинома четвертой степени по переменной  $mov$ . Проинтерпретируйте результаты.
- (b) Проверьте чувствительность результатов к добавлению новых объясняющих переменных:  $demshareprev$ ,  $demwinprev$ ,  $demofficeexp$ ,  $demelectexp$ ,  $othofficeexp$ ,  $othelectexp$ . Изменился ли полученный эффект?
- (c) Постройте разрывную регрессию для других объясняющих переменных. Что вы ожидаете? Какие результаты получились?

---

## Риск-менеджмент

---

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

Общий вес работы: 60 баллов.

##### Часть 1

Первая часть весит 20 баллов и занимает 40 минут. Каждый вопрос весит 2 балла.

1. Укажите три способа, с помощью которых риск-менеджмент может сделать внешнее финансирование более дешевым для компании.
2. Опишите три преимущества, которыми обладает ретроспективное моделирование по отношению к методу Монте-Карло (с точки зрения измерения рыночного риска) для банка.
3. Рассмотрим банк, в котором решения о предоставлении займов принимаются на основании PD (вероятность дефолта) потенциального заемщика, LGD (потери в случае дефолта) и EAD (величина, подверженная риску в случае дефолта). Опишите три различные ситуации, при которых модель кредитного риска может привести к недооценке потенциальных потерь.
4. Укажите три причины, по которым бета-фактор может являться плохим показателем рыночного риска для хедж-фонда.
5. Укажите три преимущества, которыми обладает скоринговая модель по сравнению с традиционной оценкой кредитного риска розничного бизнеса.
6. Укажите три фактора, которые привели к краху хедж-фонда LTCM в 1998 году и инвестиционного банка Lehman Brothers в 2008 году.
7. Укажите три разных подхода к оценке политического риска для крупной иностранной компании, функционирующей в России.
8. Опишите три различные ситуации, при которых CDS спред может существенно отличаться от кредитного спреда, основанного на цене облигации (для конкретной компании).
9. Укажите три основных урока, которые усвоили коммерческие банки после случая с JP Morgan Chase, известного как <Лондонский кит>.
10. Укажите три разных подхода, которые банки могут использовать для управления риском <черных лебедей> (или <неизвестных неизвестных>).

## Часть 2

Вторая часть весит 40 баллов и занимает 2 часа 15 минут. Пожалуйста, отвечайте на вопросы четко. Чем короче ваше решение, тем лучше (при прочих равных).

11. (10 баллов) Рассмотрим большой частный банк, действующий в России. Для каждого из трех основных типов риска (рыночный, кредитный и операционный риски) укажите как минимум 3 индикатора EWI (показатели раннего предупреждения), сигнализирующие о возможных потерях в будущем.

Укажите еще один важный риск для банков, появившийся недавно из-за развития финтех-индустрии (индустрия финансовых технологий). Придумайте как минимум 3 EWI для этого риска. Опишите по крайней мере три разных подхода к управлению этим риском.

12. (8 баллов) В январе 2018 года Базельский комитет по банковскому надзору заменил VaR как меру рыночного риска на ожидаемые потери (ES). Укажите по крайней мере два преимущества ES по отношению к VaR. Какие недостатки VaR остаются в ES? Опишите основные проблемы, связанные с применением ES на практике. Каким образом банки могут решать эти проблемы?

Опишите по крайней мере три альтернативных подхода к оценке рыночного риска, которые могут дополнять ES и VaR.

13. (12 баллов) Опишите 5 факторов, используемых в подходе 5C для оценки кредитоспособности потенциального заемщика. Подсказка : вам не нужно угадывать пять слов, которые начинаются на C — вместо этого постарайтесь описать логику, которая стоит за каждым из этих слов.

Укажите 1-2 измеримые характеристики потенциального заемщика по каждому из пяти факторов отдельно для розничных, корпоративных и суверенных кредитов, предоставляемых физическим лицам, крупным предприятиям и правительству соответственно.

Опишите основные проблемы, возникающие при принятии решений о предоставлении займов, основанных на скоринговых моделях. Следует включить в анализ уже рассмотренные факторы и рассмотреть их отдельно для каждого из трех кредитных сегментов.

14. (10 баллов) Недавно многие банки начали серьезно думать над возможностью использования цифровых решений в сфере управления рисками, в частности, в области операционного риска и мошенничества. Для каждого из следующих направлений борьбы с мошенничеством предложите по крайней мере три способа, с помощью которых переход к цифровым технологиям может значительно улучшить управление рисками: (i) предотвращение мошенничества, (ii) обнаружение мошенничества и (iii) реакция на мошенничество.

Опишите не только преимущества, но и недостатки этих цифровых инструментов, а также то, как банки могут справляться с этими недостатками.



## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1

Общий вес работы: 10 баллов.

Задание должно быть выполнено индивидуально и загружено на my.NES.

Выберите российскую компанию согласно файлу Code, который присваивает

ком-

панию каждому студенту. Основываясь на доступной публичной информации (средства массовой информации, веб-сайт компании, финансовая отчетность и т.д.), выделите пять основных рисков, которым подвержены стратегические цели компании. Опишите, насколько сильно компания подвержена рискам, чтобы доказать, что эти риски действительно важны для компании.

Для каждого риска предложите по крайней мере два разных метода его устранения (оперативная политика, производные финансовые инструменты, структурированное финансирование или что-то еще), являющиеся наиболее эффективными. Опишите, как эти методы устраняют описанные вами риски.

## Домашнее задание 2

Общий вес работы: 10 баллов.

Задание должно быть выполнено индивидуально и загружено на my.NES в виде архива, включающего файл Excel с вычислениями и файл Word с комментариями. В качестве альтернативы вы можете разместить комментарии в текстовые поля в файле Excel. Найдите присвоенный вам взаимный фонд (ПИФ), используя файл Code. Найдите фонд, используя его название на веб-сайте <http://nlu.ru/pifs-search.htm>.

На странице фонда нажмите <Вся статистика> ниже верхнего графика сверху. Там вы должны выбрать период выборки не менее 5 лет до последней даты и нажать значок поиска. Нажмите <Экспорт в Excel> и скачайте файл с данными по стоимости паев.

1. (1 балл) Вычислите ежедневные доходы фонда и сводную статистику за весь период выборки (среднее и стандартное отклонение).
2. (3 балла) Используя скользящее окно, равное одному году, посчитайте ежедневную волатильность акций за весь период выборки (за исключением первого года, необходимого для первоначальных расчетов). Для расчета волатильности вы должны использовать следующие подходы:
  - (a) скользящее среднее (с равными весами);
  - (b) EWMA с  $\lambda = 0.94$  (Подсказка: используйте рекуррентную формулу);
  - (c) (Бонус) GARCH(1,1).

Выведите временной ряд доходностей и разные оценки волатильности на один график и прокомментируйте различия. Какой подход вы бы выбрали? Мотивируйте свой выбор.

3. (6 баллов) Вычислите 5% VaR для 1-дневного горизонта за каждый день всего периода выборки (за исключением первого года, который может потребоваться для начальных вычислений) с использованием следующих подходов:
  - (a) Историческое моделирование с 1-летним периодом выборки.
  - (b) Дельта-нормальный подход с использованием волатильности как скользящей средней (с равными весами).
  - (c) Дельта-нормальный подход с использованием волатильности как EWMA.
  - (d) (Бонус) Один из передовых подходов, например, модель Халла-Уайта или метод Монте-Карло.

Выведите на график и прокомментируйте временные ряды доходностей.

### **Домашнее задание 3. Риск менеджмент в Банке Wellfleet: решения по поводу <Мега-сделок>**

Общий вес работы: 10 баллов.

Задание должно быть выполнено в группах до 4 человек и загружено на my.NES.

Работа над кейсом <Риск менеджмент в Банке Wellfleet: решения по поводу “Мега-сделок”> включает в себя предварительное групповое обсуждение, написание отчета с ответами на поставленные вопросы и подготовку презентации (1-2 слайда на каждый вопрос).

Отчет должен содержать постановку проблемы (включая релевантную информацию из кейса), анализ (предположения, аргументы, вычисления, оптимальные и альтернативные решения) и выводы (краткое изложение логики, которой вы руководствовались и ваших рекомендаций). Отчет должен быть написан как доклад для руководства. Максимальная длина – 3 страницы (все таблицы и вспомогательные данные могут быть помещены в отдельное приложение). Отчет должен основываться на информации, содержащейся в данном кейсе, и на вашем собственном анализе, а не на дополнительной информации, включая чужие решения, которые могут быть доступны в Интернете.

Каждый член группы должен быть готов презентовать решение кейса на занятии и ответить на вопросы по кейсу и его решению. Если кто-то придет неподготовленным и не сможет ответить на вопросы, он получит за кейс ноль баллов.

1. (6 баллов) Оцените кредитные предложения Ashar и GGC. Для каждого из них решите, одобрить сделку или нет.

Проанализируйте балансовый отчет каждой компании. Каковы основные источники дохода для компании? Рассчитайте ожидаемые потери, экономический доход и экономическую прибыль от сделки. Какие негативные события могут подорвать рентабельность сделки для Wellfleet?

Укажите по крайней мере три ключевых аргумента, поддерживающих ваше решение (об одобрении или отказе от сделки) и три ключевых пункта против вашего решения (наряду с контраргументами).

2. (4 балла) Рассмотрите процесс управления кредитным риском в Wellfleet Bank. Укажите по крайней мере три слабые стороны текущего подхода. Предложите, что можно улучшить, и оцените преимущества и издержки вашего предложения.

## Домашнее задание 4. JP Morgan Chase & убытки CIO

Общий вес работы: 10 баллов.

Задание должно быть выполнено в группах до 4 человек и загружено на my.NES.

Работа над кейсом “JP Morgan Chase & убытки CIO” включает в себя предварительное групповое обсуждение, написание отчета с ответами на поставленные вопросы и подготовку презентации (1-2 слайда на каждый вопрос).

Отчет должен содержать постановку проблемы (включая релевантную информацию из кейса), анализ (предположения, аргументы, вычисления, оптимальные и альтернативные решения) и выводы (краткое изложение логики, которой вы руководствовались и ваших рекомендаций). Отчет должен быть написан как доклад для руководства. Максимальная длина – 3 страницы (все таблицы и вспомогательные данные могут быть помещены в отдельное приложение). Отчет должен основываться на информации, содержащейся в данном кейсе, и на вашем собственном анализе, а не на дополнительной информации, включая чужие решения, которые могут быть доступны в Интернете.

Каждый член группы должен быть готов презентовать решение кейса на занятии и ответить на вопросы по кейсу и его решению. Если кто-то придет неподготовленным и не сможет ответить на вопросы, он получит за кейс ноль баллов.

1. (3 балла) Какова была первоначальная задача Главного инвестиционного отдела (CIO) в JP Morgan Chase? Какова была роль SCP? Соответствует ли она задаче CIO? Как и почему стратегия SCP изменилась в первом квартале 2012 года? Почему это привело к убыткам?
2. (4 балла) Каковы были критические ошибки в процессе управления рисками SCP? Если бы вам нужно было пересмотреть политику управления рисками в CIO, каковы были бы четыре ваших главных изменения?
3. (3 балла) Как ключевые люди в банке отреагировали на ситуацию? Была ли их реакция уместной? Рассмотрите поступки генерального директора Джейми Даймона (Jamie Dimon), главного инвестиционного аналитика Ины Дрю (Ina Drew), трейдера Бруно Иксил (Bruno Iksil) и других лиц, которых вы хотели бы рассмотреть. Кто несет основную ответственность за потери?

## Теория международной торговли

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

У вас есть 2 часа. Необходимые условия положительной оценки: положительный балл за три вопроса, сумма баллов выше 35. Общий вес работы: 100 баллов.

#### 1. (15 баллов)

- (a) (5 баллов) Предположение о возрастающей отдаче от масштаба в производстве делает торговую теорию более реалистичной. Насколько это помогает объяснить структуру международной торговли стран?
- (b) (5 баллов) Почему рост разнообразия товаров на рынках торгующих стран можно рассматривать как выигрыш от торговли? Может ли рост разнообразия быть экономически невыгодным?
- (c) (5 баллов) Является ли условие о дифференцированности товаров необходимым для объяснения внутриотраслевой торговли?

#### 2. (15 баллов)

- (a) (10 баллов) В рамках модели Рикардо для двух стран и двух товаров сравните реальные зарплаты (в терминах обоих товаров) рабочих обеих стран в автаркии и свободной торговле.
- (b) (5 баллов) Зависит ли результат в (a) от размеров стран?

3. (35 баллов). В экономике производятся два товара, каждый – с использованием двух факторов (например, труда и капитала). Предложение факторов неэластично. Первый товар однородный, отрасль конкурентна. Второй товар дифференцированный, технологии производства каждой разновидности одинаковы, причем предельные издержки равны  $c_2(w, r)$ , а фиксированные –  $\alpha c_2(w, r)$ ,  $\alpha \leq 0$ , где  $w$  и  $r$  оплата труда и капитала. Предпочтения потребителей могут быть представлены в виде функции

$$U = u(c_1, c_2) = c_1^\varphi c_2^{1-\varphi}, \quad 0 < \varphi < 1,$$

где  $c_1$  – потребление первого товара, а  $c_2$  – индекс потребления второго товара, который, в свою очередь, может быть представлен как

$$c_2 = \left( \sum_j c_{2,j}^\theta \right)^{1/\theta}, \quad 0 < \theta = \frac{\sigma - 1}{\sigma} < 1,$$

где  $c_{2,j}$  – потребление  $j$ -той разновидности второго товара.

- (a) (15 баллов) Верна ли в этой экономике теорема Столпера-Самуэльсона?
- (b) (10 баллов) Верна ли в этой экономике теорема Рыбчинского?
- (c) (10 баллов) Как изменятся ваши ответы на вопросы (a) и (b), если фиксированные издержки в технологии производства второго товара нельзя представить как постоянную долю предельных издержек?

4. (35 баллов)

- (a) (15 баллов) Предположим, что есть несколько экономик, каждая из которых устроена согласно модели Melitz [2003]<sup>1</sup>. Как влияет переход от автаркии к свободной торговле на:
  - i. благосостояние каждой экономики?
  - ii. минимальную и среднюю производительности фирм на рынке каждой страны?
  - iii. рыночные доли и прибыли производителей с разными уровнями производительности в каждой стране?

Представьте качественные и, где возможно, количественные (не надо выводить полученные на лекции соотношения, воспользуйтесь ими, объяснив, что они означают) объяснения происходящих при этом изменений.

- (b) (20 баллов) Предположим, что к блоку свободно торгующих стран из предыдущего пункта присоединяется еще одна страна, устроенная таким же образом, что и остальные. Как это повлияет на
  - i. благосостояние экономик – исходных членов торгового блока?
  - ii. минимальную и среднюю производительности фирм на их рынках, на минимальный уровень производительности их экспортеров?
  - iii. рыночные доли и прибыли производителей с разными уровнями производительности и разных категорий (экспортеров и остальных)?

---

<sup>1</sup>Marc J Melitz. The impact of trade on intra-industry reallocations and aggregate industry productivity. *Econometrica*, 71(6):1695–1725, 2003

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1

1. На [my.nes.ru](http://my.nes.ru) выложены несколько статей, моделирующих или эмпирически верифицирующих аргумент защиты зарождающихся отраслей. Там также представлены обзоры торговой политики 19-20 веков. Прочитайте эти статьи (можно также прочитать и другие релевантные статьи, в каждой приведенной работе есть много очень хороших ссылок) и напишите эссе (в печатном виде, 2-3 страницы) на тему <Аргументы за и против защиты зарождающихся отраслей>. Обязательно обсудите следующие вопросы:
  - (a) Каковы аргументы в пользу защиты молодых отраслей, насколько они безупречны, чьи интересы они отражают, а чьими пренебрегают?
  - (b) С какими проблемами сталкиваются исследователи последствий применения мер защиты зарождающихся отраслей?
  - (c) Насколько релевантны результаты работ для современной России?
  - (d) Какие выводы можно извлечь для торговой политики России?
  
2. На [my.nes.ru](http://my.nes.ru) выложены несколько статей, моделирующих или эмпирически верифицирующих процедуры применения защитных мер и мер антидемпинга. Можете также почитать другую релевантную литературу. Напишите краткое эссе (не более 1 страницы в печатном виде), оценивающее сложности и противоречия в существующих подходах оценки ущерба от импорта и демпинга. Порассуждайте, к каким последствиям приводит неоправданное применение таких мер на практике.
  
3. Выведите формулу для оптимального импортного тарифа большой страны.
  
4. Единственным поставщиком компьютерных чипов в островное государство Атралия является компания <Инлет>. Рынки сегментированы, так что можно рассмотреть рынок этой страны отдельно от всего остального мира. При поставке  $x$  чипов <Инлет> несет издержки, равные  $C(x) = cx^2/2$ , а обратная функция спроса на рынке  $p = 2/\sqrt{x}$ .
  - (a) Имеет ли смысл правительству Атралии вводить импортные тарифы?
  - (b) Сравните последствия тарифа с последствиями введения квоты, при которой достигается тот же объем импорта. В случае квоты предположите, что сначала имеет место аукцион по продаже лицензий на квоты, а затем держатели квот приобретают чипы у монополиста.
  - (c) Как изменится ваш ответ, если на рынке присутствует не одна фирма-импортер, а четыре, конкурирующие по Курно?
  
5. Отечественная и иностранная фирмы поставляют разновидность одного и того же товара на рынок третьей страны. Спрос потребителей на отечественную и иностранную разновидности –  $D(p, p^*)$  и  $D(p^*, p)$ . Спрос на товар

каждой фирмы убывает по собственной цене и растет по цене конкурента. Предельные издержки фирм постоянны и равны  $c$ . Фирмы одновременно назначают цены. Прибыль каждой фирмы вогнута по собственной цене, и функции реакции таковы, что равновесие устойчиво. До того, как фирмы устанавливают цены, правительство принимает решение об экспортной субсидии/тарифе с целью максимизации благосостояния страны, которое равно прибыли отечественной фирмы и налоговым поступлениям.

- (a) Покажите, что если выполнено условие на производные  $D_1 D_2 < D D_{12}$ , то небольшой экспортный налог увеличивает благосостояние страны. Проинтерпретируйте указанное условие в терминах наклона функции спроса.
- (b) Найдите изменение благосостояния страны при введении небольшого налога. При каких условиях оно растет?
- (c) Предположим, что каждая фирма несет фиксированные издержки, которые в точности равны равновесной прибыли фирмы в случае отсутствия вмешательства государства (в этой ситуации в равновесии чистая прибыль фирм равна нулю). Какова оптимальная политика нашего государства в этом случае?



## Домашнее задание 2

1. Рассмотрим малую открытую экономику, которая удовлетворяет предположениям модели из Grossman and Helpman [1992]<sup>1</sup>. А именно, единица товаранумератора производится из единицы труда, а все остальные товары – из труда и специфического капитала. Предпочтения потребителей одинаковы и равны  $U = c_0 + \sum_{i=1}^n u_i(c_i)$ , где  $c_i$  – потребление товара  $i$ . Если владельцы специфического капитала в отрасли  $i$  организованы в лоббистскую группу, то цель лобби – максимизировать  $W_i - C_i$ , где  $W_i$  – агрегированное благосостояние членов лоббистской группы, а сумма  $C_i$  платится государству. Цель правительства – максимизировать  $aW + C$ , где  $W$  – агрегированное благосостояние экономики,  $C$  – суммарные взносы лоббистских групп. Единственная доступная политика – торговые налоги, доходы от которых равномерно распределяются между гражданами.

(а) Предположим, что государство и лоббистские группы вовлечены в эффективный торг (*efficient bargaining*), так что торговые налоги максимизируют  $aW + \sum_{i \in \Lambda} W_i$ , где  $\Lambda$  – подмножество организованных отраслей. Найдите равновесные торговые налоги.

(b) Рассмотрите иной процесс принятия решений.

Предположим, что государство торгуется с каждым лобби в отдельности. Каждая торговля эффективна, при заданном исходе всех остальных торгов. То есть, торговая политика в каждом секторе  $i$  максимизирует  $aW + I_i W_i$ , где  $I_i$  – фиктивная переменная, равная 1, если сектор  $i$  организован. Найдите равновесные торговые налоги в этом случае. Сравните результаты с полученными в пункте (а) и объясните различия интуитивно.

(с) Предположим, что у вас есть следующие эмпирические данные по отраслям экономики, которая соответствует предположениям модели: тарифы, импорт как доля потребления (*import penetration*), эластичность спроса на импорт и данные об организованных лобби. С какими проблемами вы столкнетесь, если будете оценивать тарифную формулу, полученную в пункте (b)?

2. Напишите эссе на тему <Россия и ВТО>. Дайте в нем ответы на следующие вопросы. Вы можете сконцентрироваться на одном вопросе, а можете ответить на все.

В чем Вы видите выгоды России от вступления в ВТО, в чем заключаются опасности? Процедура вступления в ВТО у России заняла 19 лет. Приведите объяснение тому, что переговоры затянулись на столь продолжительное время, и на сегодняшний момент Россия – единственная большая экономика, не являющаяся членом ВТО.

<sup>1</sup>Gene M Grossman and Elhanan Helpman. Protection for sale. Technical report, National Bureau of Economic Research, 1992

### Домашнее задание 3

1. Рассмотрим модель Melitz [2003]. Предположим, что производительность распределена по Парето с плотностью  $g(\phi) = k\phi_{\min}^k \phi^{-(k+1)}$ ,  $\phi_{\min} > 0$ ,  $k > \sigma - 1$ , где  $\sigma$  – эластичность замещения между разновидностями. Соответствующая кумулятивная функция распределения  $G(\phi) = 1 - (\phi_{\min}/\phi)^k$ . Среднее такой функции распределения  $M = \frac{k}{(k-1)}\phi$ , дисперсия  $V = \frac{k\phi_{\min}^2}{(k-1)^2(k-2)}$  и, соответственно,  $k > 1$  необходимо для конечности среднего и  $k > 2$  – для дисперсии.
- Найдите равновесие в закрытой экономике. Определите значения минимального уровня производительности  $\phi^*$ , индекса цен  $P$ , дохода  $R$ .
  - Предположим, что две одинаковые во всех отношениях страны начинают торговать, а фиксированные и переменные издержки экспорта достаточно высоки, чтобы обеспечить отбор в экспортеры. Найдите равновесные значения минимального уровня производительности в экономике  $\phi^*$ , минимального уровня производительности экспортеров  $\phi_x^*$ , индекса цен  $P$  и доход  $R$ .
  - Объясните интуитивно последствия торговли для обеих экономик. Дайте экономическую интуицию тому факту, что именно низкопроизводительные фирмы покидают отрасль в результате либерализации торговли, а ресурсы перемещаются внутри отрасли в более производительные фирмы.
  - Предположим, что две закрытые экономики начинают свободно торговать друг с другом и издержки экспорта, как фиксированные, так и переменные, равны нулю ( $\tau = 1$ ,  $f_x = 0$ ). Скажется ли это (если скажется, то как) на последствиях либерализации в двух экономиках? Объясните ответ интуитивно.

---

## Теория отраслевой организации

---

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

Данный экзамен построен на работе со статьей [Sobel \[1984\]](#)<sup>1</sup>. Экзамен продлится 2 часа, во время работы можно пользоваться справочными материалами. Общий вес работы: 100 баллов.

1. (5 баллов) Где вероятнее всего была написана первая версия данной статьи? Подкрепите свой ответ ссылкой.
2. (5 баллов) Является ли экономическое благо из модели товаром длительного пользования или товаром кратковременного пользования? Как вам кажется, чем обоснован выбор блага данного типа?
3. (5 баллов) Какой из трех символов  $\{\beta, \delta, \alpha\}$  введен в статье для обозначения фактора дисконтирования?
4. (5 баллов) Запишите формулу для  $p_m$  ( $p$  подчеркнута).
5. (5 баллов) Объясните экономический смысл  $E_m(p)$ .
6. (5 баллов) На странице 363 найдите опечатку в доказательстве Теоремы 4, если она есть.
7. (5 баллов) В чем различия в поведении потребителей в главах 3 и 4?
8. (5 баллов) Укажите способ отличить симметричное равновесие в простых стратегиях от симметричного равновесия в стратегиях с наказанием, используя наблюдаемые данные о продажах.
9. (5 баллов) Приведем утверждение со страницы 368 в несколько видоизмененной формулировке: <Предположим, что  $x - 1 + e^{-x} \leq 0$  и  $x \geq 0$ . Тогда  $x = 0$ >. Докажите это утверждение.
10. (10 баллов) При доказательстве Теоремы 4 на странице 363 автор утверждает: <... продавцы получают монопольную прибыль...> Запишите формулу упомянутой дисконтированной прибыли для всей игры.
11. (10 баллов) Что представляет из себя множество наблюдаемых цен в случае простых стратегий? Используйте любые обозначения из статьи.

---

<sup>1</sup>Joel Sobel. The timing of sales. *The Review of Economic Studies*, 51(3):353–368, 1984

## Экономика организаций

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

Общий вес: 100 баллов.

1. (25 баллов) *Российское законодательство и неформальные указания*

Алена Леденева в своей недавней книге<sup>1</sup> говорит следующее:

<В советское время устные и личные указания были гораздо важнее и гораздо тщательнее исполнялись, чем письменные декреты (указы) и инструкции (распоряжения), причем они остаются важными и в постсоветских условиях.

В Советском Союзе, как правило, слово партийного руководителя имело максимальный вес в устной форме, а не письменной. В случае расхождения устное слово брало верх. . . Приоритет неофициальных устных указаний и неформальных договоренностей был отражением слабости закона, гнетущей атмосферы скрытности и недоверия, а также условий, когда начальствующие лица были вынуждены продираться сквозь чащу нередко разноречивых предписаний.

Нет нужды говорить, что устные указания поступают на фоне подробных и документально оформленных письменных инструкций с подписями и печатями, которые имеют определенную самостоятельную значимость. Поэтому невозможно беспрепятственно перейти минное поле письменных и устных указаний. В связи с тем, что нарушения письменных инструкций создают ситуацию <отсрочки взыскания> (*suspended punishment*), устные указания служат проверкой на личную преданность. Оба фактора усиливают зависимость от системы>.

В данном вопросе формализуется среда, описанная выше. Рассмотрим общество (принципал), контролера (чиновник) и агента (подчиненный). Принципал пассивен (т.е., не способен принимать никакие решения, включая решение о согласии с контрактом). Имеется отношенческий контракт (*relational contract*) между агентом и контролером. Агент может выбирать вектор усилий  $(e, a) \in \{0, 1\}^2$ . Оба элемента этого вектора наблюдаемы обеими сторонами, но лишь  $a$  контрактуются. Личные издержки приложения усилий агентом задаются формулой  $c(e, a) = ce + ka$ , где  $c, k > 0$  и  $1 > k$ . Полезность от усилия  $e$  для контролера задается формулой  $V = ve$ , где  $v < c$ . Полезность от усилия  $a$  достается принципалу. Заметим, что контролера не интересует величина  $a$ , а принципала – величина  $e$ . Предположим, что официально

<sup>1</sup>Alena V Ledeneva. *Can Russia modernise?: sistema, power networks and informal governance*. Cambridge University Press, 2013

оформленные контракты, предметом которых является  $a$ , конкретизируют уровень усилий  $a^* \in \{0; 1\}$  и штраф  $0 \leq F \leq k$  (перечисляемый от агента контролеру), который подлежит уплате в случае  $a = a^*$ . Уплата этого штрафа обеспечивается через суд, но контролер, в случае, когда  $a = a^*$ , может выбирать, требовать ли его уплаты или нет. Можно считать, что  $a$  означает следование закону, в то время как  $e$  – ту деятельность, которая выгодна исключительно чиновнику. Предположим, что и контролер, и агент безразличны к риску, а альтернативные возможности дают обоим нулевую полезность. Предположим также, что контролер не может премировать агента по своему усмотрению. Однако агент получает контрактную фиксированную зарплату  $w = c + r$ , выплачиваемую принципалом, причем  $r > 0$ . Таким образом, выигрыш принципала равен  $S = a - w$ .

Последовательность ходов многошаговой игры такова: 1) контролер предлагает агенту зарплату  $w$  и контракт, конкретизирующий значения  $a^*$  и  $F$ ; 2) агент либо принимает, либо отвергает предложение; 3) в случае согласия агента выплачивается зарплата  $w$ ; 4) агент выбирает вектор усилий  $(e, a)$ ; 5) контролер наблюдает  $(e, a)$  и принимает решение, добиваться ли соблюдения официально оформленного контракта, в котором прописана величина  $a$ .

- (a) (4 балла) Каковы уровни усилий, максимизирующие сумму всех выигрышей (принципала, контролера и агента)?
- (b) (4 балла) Каковы те уровни усилий, которые максимизируют выигрыш контролера?
- (c) (4 балла) Можно ли добиться уровней пункта (b) в статической ситуации?
- (d) (10 баллов) Теперь предположим, что многошаговая игра повторяется бесконечное число раз и что обе стороны дисконтируют будущее с коэффициентом  $\delta$ .
  - i. Опишите стратегии, которые обеспечат исход из пункта (b) и покажите, что они составляют для данной повторяющейся игры равновесие, совершенное по подыграм, при достаточно высоком коэффициенте  $\delta$ .
  - ii. При каких значениях  $\delta$  исход из пункта (b) можно получить как совершенное по подыграм равновесие? Предположите, что  $\frac{(1-\delta)c}{\delta} \leq r$ .
- (e) (3 балла) Что может сделать общество, чтобы повысить свой выигрыш?

## 2. (25 баллов) Многомерные усилия (multi-tasking) и шорт-термизм

Рассмотрим безразличного к риску главу компании (агент) и ее собственников (принципал). Агент обеспечивает принципалу финансовый результат  $y \in [y_{min}, \infty) \subset \mathbb{R}$ . Агент выбирает два элемента.

- Он выбирает инвестиции в безопасность (*investment in safety*)  $e \geq 0$ , осуществляемые с издержками  $c(e)$ , где  $c(\cdot)$  – гладкая возрастающая

выпуклая функция. Инвестиции  $e$  увеличивают  $\alpha(e)$  – гладкую вогнутую функцию, для которой  $\lim_{e \rightarrow \infty} \alpha(e) < y$ .

- Также выбирается зависящая от  $y$  функция распределения  $F : [y_{min}, \infty) \rightarrow [0; 1]$ . Соблюдается ограничение, согласно которому ожидаемое значение  $y$  не превосходит  $\alpha(e)$ :

$$E[y/F] = \int_{y_{min}}^{\infty} y dF(y) \leq \alpha(e).$$

Принципал вознаграждает агента одноступенчатой премией:

$$b(y) = \begin{cases} B, & \text{если } y \geq y, \\ 0, & \text{если } y < y, \end{cases}$$

где  $B > 0$ .

- (a) (5 баллов) При каждом заданном  $e$  найдите оптимальную функцию  $F^*$ , которая максимизирует интеграл

$$\int_{y_{min}}^{\infty} b(y) dF(y)$$

при ограничении  $E[y/F] \leq \alpha(e)$ .

- (b) (5 баллов) Выпишите вероятность получения премии при  $F^*$ . Как на эту вероятность влияет уменьшение  $y_{min}$ ? Дайте интерпретацию полученных результатов в свете проблемы шорт-термизма. Проиллюстрируйте свои соображения на реальных примерах.
- (c) (10 баллов) Выпишите ожидаемый выигрыш агента (т.е., ожидаемый премиальный платеж минус связанные с усилиями издержки) в виде функции от  $e$ . Найдите формулу, которая дает оптимальное  $e^*$ . Как влияет на  $e^*$  уменьшение  $y_{min}$ ?
- (d) (5 баллов) Является ли одноступенчатая премия оптимальной? Если не является, предложите альтернативную систему вознаграждения, которая снизит стимулы для шорт-термизма. Если бы вы были принципалом и могли поменять организационную структуру, что бы вы сделали с целью ограничить свойственные главе компании стимулы к шорт-термизму?

**Вопросы на умозаключения.** Ваши ответы должны быть основаны на моделях и статьях, обсуждавшихся на лекциях и семинарских занятиях. Старайтесь соблюдать точность в своих рассуждениях. При необходимости используйте формулы для того, чтобы подкрепить свою аргументацию (за избыток формул будет снижаться отметка). Дополнительные баллы будут начисляться, если вы покажете, что знакомы с литературой по теме, которая не разбиралась на занятиях.

3. (25 баллов) Что такое право собственности (*ownership*) и почему оно играет важную роль?
4. (25 баллов) Поскольку политики не получают официально оформленного вознаграждения за результат, не следует ожидать от них каких-либо усилий по улучшению своей работы в период пребывания в должности. Обсудите.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание

Ответьте на вопрос 4 (20 баллов) и любые два из вопросов 1–3 (40 баллов за каждый). Имейте в виду, что данное домашнее задание дает 15% итоговой оценки.

#### 1. Карьерные соображения при двух видах занятости

Возьмите модель карьерных соображений, которую мы изучали на занятиях. Как и в упомянутой модели, в первом периоде имеется один вид работы, для которого  $y_1 = \theta + e_1 + \varepsilon_1$ , где  $y_1$  – выпуск,  $\theta$  – продуктивность работника (распределенная как  $N(\hat{\theta}, \sigma_\theta^2)$  и неизвестная ни работнику, ни компаниям),  $e_1$  – усилия работника (вызывающие издержки  $c(e)$ ), а  $\varepsilon_1$  – шум, распределенный как  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

Во втором периоде имеется два вида занятости, *I* и *II*. Выпуск при занятости  $j = I, II$  равен  $y_j^2 = A_j + \lambda_j(\theta + e_2 + \varepsilon_2)$ , где  $\lambda_{II} > \lambda_I > 0$ ,  $e_2$  – усилия работника (вызывающие издержки  $c(e)$ ), а  $\varepsilon_2$  – шум, распределенный как  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  и не скоррелированный с  $\varepsilon_1$ . Работник занимается той задачей, для которой его ожидаемый выпуск выше<sup>1</sup>.

Дисконтирование между двумя периодами отсутствует.

- (a) Чему равно  $e_2$ ? В дальнейшем обозначайте  $e_1 = e$ .
- (b) Выразите (при выпуске в первом периоде, равном  $y_1$ ) ожидаемую продуктивность  $E[\theta/y_1, \tilde{e}]$ , исходя из догадки рынка об уровне усилий  $\tilde{e}$ .
- (c) Какова зарплата для каждого вида занятости?
- (d) Когда работника назначают выполнять вид деятельности *I*, а когда – вид деятельности *II*? Обозначьте как  $\theta^*$  порог ожидаемой продуктивности.
- (e) Если работник прилагает усилия  $e$ , а догадка рынка равна  $\tilde{e}$ , какова вероятность, что его направят выполнять вид деятельности *II*?
- (f) Выпишите ожидаемую во втором периоде зарплату работника, если он прилагает усилия  $e$ , а догадка рынка равна  $\tilde{e}$ .
- (g) Выпишите стоящую перед работником задачу максимизации и найдите условие первого порядка. Проверьте, что в случае  $\lambda_I = \lambda_{II} = 1$  мы получаем условие, ранее полученное на наших занятиях.
- (h) Выпишите вторую производную для задачи, стоящей перед работником. Какую потенциальную проблему вы видите? Что происходит, когда имеется один вид деятельности,  $\lambda_I = \lambda_{II}$ ?

<sup>1</sup> Отметим, что если работник сам выбирает себе задачу, вне равновесия мнения работника и рынка относительно наилучшего применения его сил могут различаться. Таким образом, если работник выбирает <неверную> (по представлениям рынка) задачу, что должен рынок думать и какую зарплату предлагать?



- (i) Предположим, что  $c(e) = \frac{\nu}{2} e^2$ . Найдите условие, при котором задача работника глобально выпукла.
- (j) При условии, найденном в п. (i), найдите равновесие (в чистых стратегиях). Сравните его со случаем одного вида занятости из лекции. Имеется ли какое-либо различие в части сравнительной статики? Почему теперь равновесные усилия зависят от средней продуктивности  $\hat{\theta}$ ?
- (k) (Дополнительный пункт с дополнительными баллами для итоговой оценки, если удастся решить.) Если условие, найденное в п. (i), не удовлетворяется, нет ясности, что равновесие в чистых стратегиях существует. Каковы соображения насчет того, когда оно существует? Каковы соображения насчет равновесий в смешанных стратегиях?

## 2. Модель Левина (Levin) с многомерными усилиями

Рассмотрим следующее внешнее окружение. Имеется компания, выпуск которой задан переменной  $y \in \{0, 1\}$ .  $\Pr[y = 1] = f_1 a_1 + f_2 a_2$ , где  $(a_1, a_2)$  – вектор усилий, прилагаемых работником. Усилия работника не наблюдаемы компанией, при этом личные издержки (*private costs*) работника заданы формулой  $\frac{k}{2}(a_1^2 + a_2^2)$ . Выпуск компании не наблюдаем работником. Таким образом, ни усилия, ни выпуск нельзя использовать ни в официально оформленных, ни в отношенческих контрактах. Имеется некоторый показатель трудовых усилий (*performance measure*),  $p \in \{0, 1\}$ , причем  $\Pr[p = 1] = g_1 a_1 + g_2 a_2$ . Мы предполагаем, что  $p$  наблюдаем обеими сторонами и что векторы  $f = (f_1, f_2)$  и  $g = (g_1, g_2)$  неотрицательны. Обе стороны безразличны к риску. Для упрощения анализа предполагайте, что внешняя альтернатива (*outside option*) для обеих сторон нулевая. Наконец, во всех пунктах предполагайте, что  $k$  достаточно велико, так что величины  $f \cdot a$  и  $g \cdot a$  всегда лежат между нулем и единицей.

- (a) Предположим, что  $p$  контрактуем и что компания может выдвигать предложение на условиях <хочешь – бери, хочешь – нет> (*take-it-or-leave-it*). Сформулируйте задачу компании и опишите ее решение.
- (b) Теперь предположим, что  $p$  не контрактуемо (хотя по-прежнему наблюдается) и что компания и работник разыгрывают бесконечно повторяющуюся игру. Многошаговой игре свойственна следующая последовательность ходов. (i) Компания предлагает работнику контракт  $s = w + bp$ . (ii) Работник принимает или отвергает предложение. Если он отвергает, обе стороны получают нулевой выигрыш. В ином случае он получает  $w$  со стороны компании и выбирает вектор усилий  $a = (a_1, a_2)$  с издержками  $\frac{k}{2}(a_1^2 + a_2^2)$ . (iii) Выявляются выпуск и показатель трудовых усилий, и компания решает, платить или не платить премию  $bp$ . Обе стороны дисконтируют будущее с коэффициентом  $\delta$ .  
Отношенческий контракт для каждого варианта публично наблюдаемого прошлого конкретизирует (i) ту компенсацию, которую компания должна предложить; (ii) принятие или отвержение работником условий, которые предлагает компания; (iii) те усилия, которые он должен

прикладывать в случае принятия. Мы говорим, что контракт является самопринуждающим (*self-enforcing*), если он описывает совершенное публичное равновесие (*perfect public equilibrium*) повторяющейся игры. Мы говорим, что контракт является оптимальным, если он самопринуждающий, и при этом не существует другого самопринуждающего контракта, который порождает более высокий ожидаемый общественный излишек (*total surplus*). Покажите, что если оптимальный контракт существует, имеются оптимальные стационарные контракты (контракт является стационарным, если вдоль равновесного пути для каждого варианта публично наблюдаемого прошлого он конкретизирует одни и те же план выплат (*payment schedule*) и уровень усилий). Каковы ключевые предположения, которые приводят к этому результату?

- (с) Для каких значений  $\delta$  исход, полученный в пункте (а) (уровень усилий, прилагаемых в каждом периоде), можно осуществить при помощи отношенческого контракта?
- (d) Для каких значений  $\delta$  имеется оптимальный отношенческий контракт, при котором прилагаются положительные усилия? (Можно определить  $\delta \equiv \frac{1}{1+r}$  и выразить ответ через  $r$ .) Охарактеризуйте один оптимальный контракт для каждого положительного значения  $\delta$  (или  $r$ ). Как зависит ваш ответ от  $f \cdot g$ ? Почему?

### 3. Модель Агйона–Тироля с множественными агентами

Предположим, что начальник (принципал) имеет в подчинении  $n$  идентичных агентов. Каждому из агентов приходится выбирать из набора задач, идентичных *ex-ante*. Мы предполагаем, что имеется задача, отрицательная полезность (*disutility*) которой достаточно значительна и для принципала, и для агента, так что никто не хочет выбирать задачу, не узнав ее характера в точности. (Если ни одна задача не выбрана, обе стороны получают нулевую личную выгоду.) Агент  $i$  способен прилагать усилия  $e_i$  с личными издержками  $\frac{k}{2}e_i^2$  для того, чтобы узнать характер каждой из своих задач. Аналогично, принципал способен прилагать усилия  $E_i$ , чтобы узнать характер задач агента  $i$  с вероятностью  $E_i$ . Общие издержки усилий, прилагаемых принципалом, равны  $\frac{k}{2}(\sum_{i=0}^n E_i)^2$ . Предпочтительная для агента  $i$  задача приносит ему личную выгоду  $b$ , обеспечивая принципалу выгоду в размере  $\alpha b$ , где  $\alpha \in [0, 1)$ . Та задача агента  $i$ , которая предпочтительна для принципала, приносит принципалу личную выгоду в размере  $B$ , а выгода агента  $i$  составляет  $\beta b$ , где  $\beta \in [0, 1)$ . Чтобы выбрать свою задачу, сначала агент  $i$  предлагает принципалу одну из задач, после чего принципал решает, согласиться ли на эту задачу или отвергнуть ее и предоставить новую. То есть, выбор всех задач официально подконтролен принципалу. Предположим, что все стороны безразличны к риску и что внешняя альтернатива для каждого агента равна  $\bar{w}$ . Также предположим, что ни уровни усилий, ни задачи не контрактуются, так что все, что может предложить принципал каждому из агентов, – это фиксированный трансферт  $w$ .

- (a) Объясните роль, которую в модели играет следующее предположение: существует задача, которая для обеих сторон плоха в такой мере, что никто не хочет выбирать задачу, не зная в точности ее характер.
- (b) Охарактеризуйте симметричное равновесие (предполагая, что  $K \geq B$  и  $k \geq b$ , так что в любом равновесии  $E_i, e_i \in [0, 1)$  при всех  $i$ ). Какую зарплату принципал предложит агентам, если каждый знает, что они будут координироваться на этом равновесии? Каким образом  $w$  зависит от  $n$ ? Почему? Возможны ли асимметричные равновесия? Если они возможны, охарактеризуйте их. Если они невозможны, объясните причину.
- (c) Предположим, что принципал способен твердо гарантировать приложение положительных усилий, чтобы узнать характер задач каждого своего подчиненного (этим обеспечивается тот факт, что единственное равновесие является симметричным). Сколько агентов наймет принципал? (Можно рассматривать  $n$  как непрерывную переменную.) Найдите условия на  $w$ , при которых  $n^* < \infty$ .
- (d) Теперь предположим, что число агентов фиксировано, но при этом  $a_i$  и  $b_i$  могут быть неодинаковыми для разных агентов. Вновь предположим, что  $K \geq B$ , а  $k \geq b_i$  для всех  $i$ . Существует ли равновесие, при котором  $E_i > 0$  при всех  $i$ ? Охарактеризуйте его (возможно, вам потребуется добавить некоторые дополнительные ограничения на параметры, чтобы гарантировать его существование). Каким образом  $E_i^*$  зависит от  $a_i$  и  $b_i$ ? Почему?

#### 4. Путешествие на остров Аруба (в пределах 500 слов)

Страдает ли следующая компания от проблем «безбилетника» в отношениях между сотрудниками. Обсудите, почему да или почему нет.



ПОДПИСИ К РИСУНКАМ (слева направо и сверху вниз):

1. НАЧАЛЬНИК (говорит): <Дилберт, я хочу, чтобы вы управляли проектом Уолли, пока он будет в отпуске на Арубе>.

2. НАЧАЛЬНИК (думает): <Пусть начнется игра в перекидывание ответственности>.

3. ДИЛБЕРТ (обращаясь к Уолли): <Разве не на этой неделе все должно завершиться?>

УОЛЛИ (говорит): <Совпадение>.

4. ДИЛБЕРТ (обращаясь к Уолли): <Возможно, вы смогли бы поменять свои планы>.

УОЛЛИ (держит свой авиабилет и говорит): <Вот, билеты возврату не подлежат!>

5. ДИЛБЕРТ (обращаясь к Уолли): <Если вы не меняете свои планы, значит, проект не является важным>.

УОЛЛИ (думает): <Силен>.

6. ДИЛБЕРТ (обращаясь к начальнику): <Я с удовольствием засуну проект Уолли в самый низ своей груды задач, чтобы он провалился и опозорил Уолли>.

7. ДИЛБЕРТ (обращаясь к Уолли): <На Арубе внимательно присмотритесь к официантам – может быть, это ваша новая профессия>.

8. НАЧАЛЬНИК (думает): <Два бесплатных билета на Арубу – я выиграл>.

Автор рисунков: Скотт Адамс

## Кейс 1

### *Оплата по результатам в компании Safelite Auto Glass*

Safelite – компания, которая заменяет разбитые ветровые стекла в автомобилях. Эта компания, которая недавно провела реорганизацию в попытке повысить производительность своих установщиков, однако она по-прежнему страдает от низкой производительности. Средний установщик автостекол способен установить ветровое стекло за срок, чуть больший часа, однако устанавливает всего лишь 2,5 ветровых стекла за восьмичасовой рабочий день. Глава компании, Джон Барлоу, обеспокоен тем, что многие установщики не производительны, потому что они не слишком усердно работают. Барлоу говорит: <Посчитайте сами. Требуется час, чтобы вставить ветровое стекло, не считая время поездки. Если они были на работе на протяжении восьми часов, при этом вставляя ветровые стекла в течение двух с половиной часов, чем же они занимались все остальное время?> Ознакомьтесь с соответствующей статьей (“Performance pay at Safelite Auto Glass”) и ответьте на следующие вопросы.

1. Почему столь низка производительность установщиков автостекол компании Safelite?
2. Позволяет ли предложенная схема оплаты по результатам работы справиться с проблемами, описанными в вопросе 1? Приводит ли она к новым проблемам? Объясните.
3. Каковы плюсы и минусы перехода от ставок зарплаты к сдельной оплате? Являются ли установщики автостекол подходящими кандидатами для сдельной оплаты? Почему да или почему нет?
4. Должна ли присутствовать гарантированная зарплата? Если да, то как ее следует установить?
5. Каковы вероятные последствия перехода от оплаты по ставке к сдельной оплате (с точки зрения производительности и качества работы)?
6. Какое решение должно принять руководство компании?
  - (a) Использовать новую сдельную систему оплаты при снижении гарантированной ставки.
  - (b) Использовать новую сдельную систему оплаты БЕЗ снижения гарантированной ставки.
  - (c) Не использовать новую систему, а сохранить старую.

## Кейс 2

### *Lincoln Electric*

Компания Lincoln Electric была основана в 1895 г. и остается на рынке на протяжении более ста лет, несмотря на напряженную внутреннюю и внешнюю конкуренцию (ее конкуренты – одни из самых жестких в мире). Она начиналась как мастерская, которая ремонтировала электромоторы, а ныне производит широкий ассортимент сварочных изделий и оборудования. Перед входом на территорию компании Lincoln Electric находится знак, на котором написано: <Запрещен вход ранее чем за полчаса до начала работы>. Он размещен здесь, потому что работники столь остро желали приступить к работе, что за воротами до начала их смены выстраивались очереди. Прочитайте статью [Fast and Berg \[1975\]](#)<sup>1</sup> и ответьте на следующие вопросы.

1. Какие виды поощрительных вознаграждений (performance incentives) использует компания Lincoln Electric, и как они помогли ей улучшить работу за последние 25 лет?
2. Каковы отрицательные аспекты поощрительных вознаграждений компании Lincoln Electric?
3. Хотели бы вы работать в компании Lincoln Electric и вообще в подобной обстановке?
4. Как вы думаете, будет ли система стимулов компании Lincoln Electric работать за пределами США?

Подготовьтесь обсудить ее успех/неудачу в России.

---

<sup>1</sup>Norman D Fast and Norman A Berg. *The Lincoln electric company*. Harvard Business School, 1975

## Кейс 3

### *Alibaba Group*

Alibaba Group – одна из ведущих технологических коммерческих организаций Китая. В 2002 г., когда сайт Alibaba.com стал прибыльным, его основатель Джек Ма собрал горстку сотрудников в своем офисе и поведал им, что имеется секретный проект, к которому они могут присоединиться. Но для этого им нужно будет уволиться из компании Alibaba, вести работу в секретном месте и не сообщать ни друзьям, ни семье про этот новый стартап, который они будут создавать. Собранные сотрудники согласились на этот секретный проект, и Ма раскрыл то место, в котором они будут вести работу. Речь шла про его старую квартиру, в которой годами ранее он и 17 сооснователей запустили первоначальный сайт компании Alibaba. Именно так был создан проект Taobao. Запустив Taobao в той же самой квартире, из которой был запущен сайт Alibaba.com, Ма сумел вселить в новую компанию культуру, идентичную культуре уже существующей компании, при этом сохраняя ее совершенно отдельной. Пожалуйста, прочитайте соответствующую статью (“The Alibaba Group”) и ответьте на следующие вопросы.

1. Как компания Alibaba добилась конкурентного преимущества? Почему она ведет бизнес <под одной крышей> (*under one roof*)? Является ли ее конкурентное преимущество прочным?
2. Соответствует ли условиям нынешняя степень конкуренции/децентрализации отдельных бизнес-единиц?
3. Согласны ли вы, что Джеку Ма следует поощрять расширение кооперации? Если да, каким образом?
4. Каким образом компания Alibaba должна организационно оформлять новые коммерческие предприятия, по мере их развития? Должна ли она включать их в себя или создавать отдельные бизнес-единицы? Каковы плюсы и минусы практики, при которой новые коммерческие предприятия предоставляют отчетность напрямую Джеку Ма?

## Эмпирика отраслевой организации

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### Экзамен

У вас есть 2 часа. Разрешается использовать слайды лекций на А4. Не более 100 слов на каждый вопрос, не требующий вычислений. Общий вес работы: 190 баллов.

1. (30 баллов) Вам нужно оценить параметры производственной функции фирмы. У вас есть данные об объеме выпуска  $Q$  и трех факторах производства: капитале  $K$ , труде  $L$  и материалах  $M$ .
  - (a) (5 баллов) Предполагая производственные функции Кобба–Дугласа в статическом случае – не как в статье [Olley and Pakes \[1992\]](#)<sup>1</sup>, выпишите регрессию, которую вы хотели бы оценить.
  - (b) (5 баллов) Основываясь на полученных результатах регрессии, обсудите, как протестировать гипотезы о постоянной отдаче от масштаба и возрастающей отдаче от масштаба в этой модели.

Предположим теперь, что остались только два фактора производства:  $K$  и  $L$  (материалы не имеют значения).

- (c) (10 баллов) У вас также есть панельные данные об инвестициях за несколько лет. Вы считаете, что решения фирм об использовании факторов производства коррелируют с некоторыми ненаблюдаемыми факторами. Обсудите, как можно справиться с этой проблемой, используя имеющиеся данные об инвестициях.
  - (d) (10 баллов) Простое статическое оценивание дает вам результаты регрессии  $\log(Q) = 0.6 * \log(L) + 0.4 * \log(K)$ , а оценки в регрессии (c) дают вам  $\log(Q) = 0.3 * \log(L) + 0.34 * \log(K)$ . Используя формулы для смещения вследствие пропущенных переменных, объясните, почему коэффициент при  $\log(L)$  уменьшится.
2. (10 баллов) В игре с неполной информацией агент выбирает, пить или нет. Полезность зависит от среднего потребления алкоголя знакомыми, собственного состояния здоровья и семейного положения (состоит ли в браке), а также среднего семейного положения и среднего состояния здоровья знакомых.
  - (a) (5 баллов) Пусть есть основания полагать, что в этой модели существует несколько равновесий. Позволяет ли стратегия, которая обсуждалась на лекции, идентифицировать параметры функции полезности?

<sup>1</sup>G Steven Olley and Ariel Pakes. The dynamics of productivity in the telecommunications equipment industry. Technical report, National Bureau of Economic Research, 1992



- (b) (5 баллов) Предположим теперь, что данные описывают разыгрывание единственного равновесия, веры линейны, а случайная составляющая полезности распределена равномерно на интервале  $(-1, 0)$ . Можно ли тогда состоятельно оценить параметры? Если да, обсудите процедуру их оценки.
3. (10 баллов) Обсудите, как протестировать гипотезу о естественно-монопольном типе функции издержек, с примером эмпирической работы.
4. (50 баллов)
- (a) (5 баллов) В статье BLP спрос оценивался с использованием разновидности метода IV, а предложение оценивалось без использования инструментов. Обсудите, почему авторы считают, что инструменты нужны для спроса, но не нужны для предложения.
- (b) (5 баллов) Почему мы не используем предположения модели Бертрана о поведении фирмы для традиционных линейных моделей с однородными товарами, но используем их для рынков дифференцированных товаров, как в статье BLP?
- (c) (10 баллов) Обсудите процедуру оценивания ценовой эластичности в ранних версиях статьи BLP – например, [Berry \[1994\]](#)<sup>2</sup> на примере модели бинарного выбора.
- (d) (5 баллов) Выведите <правило обратной эластичности>: индекс Лернера равен обратной эластичности спроса на конкретный продукт  $j$  для фирм, конкурирующих по Бертрану.
- (e) (20 баллов) Докажите, что в модели замены двигателей Раста оператор Беллмана для функции ожидаемой ценности (из уравнения Беллмана) является сжимающим отображением.
- (f) (5 баллов) Чем полезно свойство сжимающего отображения из пункта (e)?
5. (30 баллов) У потребителя есть выбор из двух вариантов:

$$U(1)_n = \beta_0 + \beta_1 * \log(price)_n + \beta_2 * age_n + \varepsilon_n = V_n + \varepsilon_n;$$

$$U(2)_n = 0.$$

Случайные составляющие полезностей распределены равномерно.

- (a) (5 баллов) Выведите формулу вероятности выбора варианта 1.
- (b) (10 баллов) Выведите формулу потребительского излишка.
- (c) (5 баллов) Опишите, как оценить эту модель в предположении, что цена является эндогенной, но для нее есть инструмент.

<sup>2</sup>Steven T Berry. Estimating discrete-choice models of product differentiation. *The RAND Journal of Economics*, pages 242–262, 1994

- (d) (10 баллов) Опишите, как оценить эту модель в предположении, что цена является эндогенной, для нее есть инструмент, и коэффициент  $\beta_1$  является случайным.

6. (40 баллов) Исследователь хочет оценить спрос на автомобили.

Существует около 100 марок автомобилей – Lada Kalina, Renault Logan, BMW (модель 116i) и т.д., – которые продаются в России в 1000 магазинах. Альтернативный вариант – пользоваться общественным транспортом.

Исследователь находит данные по отдельным покупкам. Он исходит из того, что выбор зависит от характеристик автомобиля (цены его самого и конкурентов, мощности двигателя в лошадиных силах, размера, I(сделано в Германии), цвета), а также демографических характеристик (как возраст и пол).

- (a) (5 баллов) Изначально он думает об использовании системы линейных регрессий для оценки спроса. Выпишите систему уравнений, которую он хотел бы оценить. Предполагая, что цена экзогенная, обсудите проблему, с которой он сталкивается при оценке спроса.
- (b) (5 баллов) Он решает отказаться от линейной системы и вместо этого оценивает модель со следующей спецификацией:

$$U(i)_n = \beta_0 + \beta_1 * price_i + \beta_2 * horse\ power_i + \beta_3 * I(made\ in\ Germany)_i + \beta_4 * I(male)_n + \beta_5 * age_n + \varepsilon_{in} = V(i)_n + \varepsilon_{1n}, \quad i = 1, \dots, 100;$$

$$U(101)_n = \varepsilon_{101n}.$$

Случайные составляющие полезностей имеют распределение EV1. Индекс  $n$  соответствует потребителю, индекс  $i$  – варианту выбора.

- (c) (5 баллов) Пусть полезность  $U(i)$  зависит только от цены товара  $i$ . Можно ли оценить эластичность товара  $i$  относительно цены товара  $j$ ? Если нет, объясните, почему. Если да, объясните, как.
- (d) (10 баллов) Исследователь подозревает, что немецкие автомобили являются более близкими заменителями друг для друга, чем для остальных, то же для корейских или российских автомобилей. Что это предположение говорит нам о структуре регрессионных остатков? Как исправить модель, оцененную в пункте (b)?
- (e) (10 баллов) Предположим, что исследователь при попытке оценить модель (d) не может запустить вложенную регрессию logit в Stata (но может запустить probit, logit, mixed logit и BLP). Как ему оценить модель (d)?
- (f) (5 баллов) Теперь исследователь начинает подозревать, что цена эндогенна, но, к счастью, находит инструменты для цены. Обсудите, как состоятельно оценить спрос. Обратите внимание, что есть много марок автомобилей и много рынков, поэтому метод контрольных функций не будет работать. Обсудите подробно каждый шаг.

7. (20 баллов) Исследователь из <Ингосстраха> имеет данные по страхованию автомобилей и выполнил несколько регрессий (на данных по отдельным клиентам). Исследователь имеет данные о размере страховых выплат <Ингосстраха> клиенту, цене, которую клиент заплатил за страхование, и набор характеристик клиента и его автомобиля, которые использует <Ингосстрах> для определения цены страхования. В набор этих характеристик входят пол клиента, индикатор возраста до 25 лет, стаж вождения, стоимость автомобиля, возраст автомобиля, I(спортивный автомобиль).
- (a) (10 баллов) Опишите тест на наличие неполной информации на данном рынке.
- (b) (10 баллов) Проведя вышеописанный тест, исследователь не получил подтверждения гипотезы о неполной информации. Однако он узнал, что правительство изменило законы (правила), и теперь страховым компаниям запрещено осуществлять ценовую дискриминацию по признаку пола клиента. Тогда исследователь прогнал ряд регрессий и пришел к выводу, что, во-первых, пол коррелирует с суммой страховых выплат, произведенных <Ингосстрахом> клиенту, и ценой страхования, которую заплатил клиент, и, во-вторых, пол не коррелирует с другими переменными, имеющимися в наборе данных (т. е. возраст до 25, стаж вождения, стоимость и возраст автомобиля, I(спортивный автомобиль)). Он повторно выполнил вышеописанный тест для новых условий регулирования. Опишите новый тест и дайте прогноз, какого результата стоит от него ожидать. Будьте точны.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

### Домашнее задание 1

Вы можете работать над задачей 5 группами по 4 человека (только над задачей 5).

#### 1. Различные предположения об ошибках

Пусть потребитель имеет выбор из двух вариантов, полезность от последнего из которых считается равной нулю. Функции полезности имеют вид

$$U(1)_j = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon_j, \quad U(0) = 0.$$

- (а) Пусть  $\varepsilon_j$  являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами (*iid*), имеющими равномерное распределение на отрезке  $[-1, 0]$ . Определите, как оценить эту модель.
- (б) Пусть  $\varepsilon_j$  являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими логистическое распределение. Определите, как оценить эту модель.

#### 2. Вероятности выбора и потребительский излишек: вывод

Выведите формулы вероятностей выбора и потребительского излишка для задачи выбора из  $N$  вариантов.

Если  $\varepsilon_j$  являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с распределением экстремальных значений (*iid EV*), то

$$E[\max(V_j + \varepsilon_j)] = \gamma + \ln \sum_{j=1}^N \exp(V_j), \quad \text{где } \gamma - \text{постоянная Эйлера, } \gamma = 0.577.$$

Указание:

У потребителя есть  $N$  вариантов выбора, полезности от них следующие:

$$U_j = V_j + \varepsilon_j, \quad \text{где } \varepsilon_j - \text{iid EV.}$$

- (а) Докажите, что

$$\Pr(\text{вариант } 1) = \Pr(V_1 + \varepsilon_1 > V_i + \varepsilon_i \text{ для любого } i) = \frac{\exp(V_1)}{\sum_{j=1}^N \exp(V_j)}$$

- (б) Докажите, что

$$E(\varepsilon_1 / \text{вариант } 1) = E(\varepsilon_1 / \varepsilon_1 - \varepsilon_i > V_i - V_1 \text{ для любого } i) = \gamma - \Pr(\text{вариант } 1)$$

- (с) Докажите, что

$$E[\max(V_j + \varepsilon_j)] = \sum_{j=1}^N \Pr(\text{вариант } j) [V_j + E(\varepsilon_j / \text{вариант } j)] = \gamma + \ln \sum_{j=1}^N \exp(V_j)$$

### 3. Эмпирическое задание-1. OLS, IV, 2SLS, CF, FWL

Скачайте данные о потреблении сигарет по штатам США (файл *cigdata.dta*). Все результаты регрессий должны быть переведены в xls с помощью команды *outreg*. Копии экрана из Stata не принимаются. Также следует приложить до-файл со всеми процедурами оценивания.

- (a) Используя OLS, оцените эластичность потребления сигарет по цене и доходу.
- (b) Для ценовой эластичности продемонстрируйте теорему FWL
  - i) с помощью *avplot*;
  - ii) используя оценки последовательной регрессии.
- (c) Почему цена может быть эндогенной?
- (d) Получите оценки IV с двумя инструментами из имеющихся данных.
- (e) Повторите IV, используя оценки последовательной регрессии (приведите результаты обеих регрессий). Кроме того, продемонстрируйте *avplot* для ценовой эластичности.
- (f) Протестируйте регрессоры на релевантность (используйте команду Stata *test*).
- (g) Протестируйте инструменты на экзогенность и релевантность с помощью команды *ivreg2* (вам необходимо скачать ее из интернета).
- (h) Используйте метод контрольных функций для получения результатов 2SLS. Как можно интерпретировать коэффициент при *residuals*?
- (i) Пусть мы считаем, что эластичность может варьироваться от штата к штату (поэтому предположим, что она случайна). Даст ли оценка IV состоятельные оценки средней эластичности? Если ответ отрицательный, предоставьте состоятельные оценки эластичности.

### 4. Эмпирическое задание-2. Logit с помощью Stata и R

Скачайте данные по участию в медицинском страховании (файл *insured.dta*).

- (a) Оцените вероятность быть застрахованным в зависимости от демографических и других характеристик с помощью функции Stata *logit*. Проинтерпретируйте коэффициенты. Приложите код и оценки.
- (b) Сделайте то же в R. Приложите код и оценки.

### 5. Эмпирическое задание-3. Логит, вложенный логит и т. д.

Скачайте данные о потреблении алкоголя российскими мужчинами в 2007 году (файл *alcohol\_2007*). Идея заключается в анализе эффекта от отмены региональных законов, регулирующих водочную отрасль (дифференцированный акцизный налог). Переключатся ли люди с потребления самогона или пива на водку? Или от потребления пива или вина на водку? Для этой задачи вам, как и раньше, нужно привести результаты, но не обязательно использовать *outreg*.

- (a) Используйте logit для оценки модели выбора из 4 различных вариантов в зависимости от демографических характеристик и дифференцированного акцизного налога.  
Варианты такие: <пить водку>, <пить самогон>, <пить другое или вообще не пить>, <пить водку и самогон>.  
Замечание: здесь нужно создать несколько дополнительных переменных.
- (b) Найти (смоделировать) влияние отмены регулирования на
- i. долю тех, кто пьет водку/самогон;
  - ii. потребительский излишек.
- (c) Предложите варианты замещения, более подходящие для этой модели, и оцените вложенную модель logit.
- (d) Предположив, что коэффициент при налоге случаен, оцените смешанный логит (не нужно вводить специфические варианты замещения, как в пункте 3).
- (e) Оцените модель из пункта 1, если у вас есть два варианта: <пиво+вино> и <вообще не пить>.

## Домашнее задание 2

### 1. BLP

- (a) Скачайте данные с сайта<sup>1</sup>. Выберите какой-нибудь продукт из базы данных, убедившись, что тот же продукт не выбрали другие группы. Сделайте сводную статистику.
- (b) Оцените модель BLP в случае однородных потребителей. Опишите свои результаты в наиболее иллюстративной форме. Нужно отобразить эластичности и по своей, и по другим ценам.
- (c) Рассмотрите модель с гетерогенными потребителями, используя нормальное распределение для (одного) случайного коэффициента. Предполагая, что случайные коэффициенты некоррелированы, оцените модель и отобразите результаты таким же образом, как и в случае однородных потребителей.
- (d) Машинное обучение. (Если я включу в курс машинное обучение, то эта часть обязательна, иначе – нет). Используйте простую модель logit/OLS для оценки спроса. Примените любые (на ваше усмотрение) методы машинного обучения, которые могут помочь вам в оценке спроса. Прокомментируйте.

### 2. Динамическая оптимизация

- (a) Прочитайте статью Rust [1987]<sup>2</sup>. Скачайте данные `_les`<sup>3</sup>. Вы также можете скачать с того же сайта код для метода NXFP. Далее предполагается, что коэффициент дисконтирования  $\beta = 0.9$ .
- (b) Пусть решение о замене двигателя автобуса является статическим. Предполагая, что шоки каждого периода  $\epsilon(1)$  имеют логистическое распределение, а  $\epsilon(0) = 0$ , получите непараметрическую оценку эксплуатационных издержек в предположении, что издержки на замену двигателя постоянны. В какую сторону сместились оценки издержек по сравнению с динамическим случаем? (Проделайте аналитические выкладки перед тем, как вычислить оценки для динамического случая).
- (c) Оцените параметры при линейной и квадратичной спецификациях функции издержек в статье Rust (1987), дискретизировав пространство состояний. Для получения оценок вычислите функцию Беллмана как решение дискретизированного уравнения Беллмана. Оцените модель с помощью логистической функции псевдо-правдоподобия и вычисленной вами функции Беллмана. Вычислите стандартные ошибки методом бутстрапа.

<sup>1</sup><https://research.chicagobooth.edu/kilts/marketing-databases/dominicks>

<sup>2</sup>John Rust. Optimal replacement of gmc bus engines: An empirical model of harold zurcher. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 999–1033, 1987

<sup>3</sup> <https://editorialexpress.com/jrust/nfxp.html> (папка dat)